О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Н.В. Нестеренко

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина

model@imath.kiev.ua

Построение эффективных приближенных методов решения и связанные с ним вопросы существования и единственности решения является одной из важных проблем вычислительной математики. Способность современных надежных алгоритмов и машинных программ к автоматическому решению сложных систем обыкновенных дифференциальных уравнений поставила перед классическим линейным методом ряд проблем.

Метод прямых является промежуточным между аналитическими и сеточными методами. Сущность метода состоит в том, что для данной системы дифференциальных уравнений в частных производных дискретизируются все независимые переменные кроме одной. Эта полудискретная процедура дает удвоенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем численно интегрируется.

Рассматривается нелинейное уравнение диффузии

$$u_t = [H(x,t,u)u_x]_x + f(x,t,u,u_x), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = F(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u_x(0,t) = \alpha_3(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) = \beta_3(t), \quad 0 < t \le T,$$

где для стабильности: $m \le H \le M,\ u \in (-\infty, \infty)$.

Первый шаг заключается в дискретизации пространственной переменной в дифференциальном уравнении с частными производными с целью получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это в свою очередь требует выполнения краевых условий. Положим $\triangle x = h = 1/N$ ограничена слева прямой $i = 0$, а справа $i = N$, а $H_{i\pm1/2} = H(x_{i\pm1/2}, t, u_{i\pm1/2})$. Тогда для $i = 0$

$$\frac{du_0}{dt} = \begin{cases} 0,\ u_0 = \alpha_3/\alpha_1, & \text{если } \alpha_2 = 0, \\ \dfrac{2}{h}\left[H_{1/2}\dfrac{u_x - u_0}{h} - H_0\dfrac{\alpha_3 - \alpha_1 u_0}{\alpha_2}\right] + f\left(x_0, t, u_0, \dfrac{\alpha_3 - \alpha_1 u_0}{\alpha_2}\right), & \text{если } \alpha_2 \ne 0, \end{cases}$$

для $i = 1, \ldots, N-1$

$$\frac{du_i}{dt} = \left[H_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) - H_{i-1/2}(u_i - u_{i-1})\right] \frac{1}{h^2} + f\left(x_i, t, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right)$$

и для $i = N$

$$\frac{du_N}{dt} = \begin{cases} 0, \ u_N = \beta_3/\beta_1, & \text{если } \beta_2 = 0, \\ \dfrac{2}{h}\left[H_N \dfrac{\beta_3 - \beta_1 u_N}{\beta_2} - H_{N-1/2} \dfrac{u_N - u_{N-1}}{h}\right] + f\left(x_N, t, u_N, \dfrac{\beta_3 - \beta_1 u_N}{\beta_2}\right), & \text{если } \beta_2 \neq 0. \end{cases}$$

Начальные условия: $u_i(0, x_i) = F(x_i), \ i = 0, 1, \ldots, N$.

С помощью линейного метода могут быть решены разнообразные задачи. Результаты, полученные линейным методом подтверждаются альтернативным итерационным методом.

1. Михлин С.Г. О рациональном выборе координатных функций в методе Ритца, Журн. выч. матем. и матем. физ., 1962, 2:3.