

ПРИЛАД ЛЕОНАРДО ДА ВІНЧІ

М.І. Бодяк

Національний університет харчових технологій

Конструкція досконалого циркуля, вигаданого Леонардо да Вінчі, дозволяє зобразити будь-яку криву другого порядку: коло, еліпс, параболу, гіперболу. В ескізі інструмента Леонардо використовує факт, відомий з античних часів: переріз конуса площиною, яка не проходить через його вершину, являє собою криву другого порядку. В доповіді буде доведено цей факт за допомогою формул перетворення системи координат, завдяки чому отримано аналітичне рівняння довільного плоского конічного перерізу. Тому за допомогою приладу Леонардо да Вінчі можливо будувати криву із заданими характеристиками.

Запишемо рівняння конуса виходячи з наглядних геометричних міркувань. Нехай в площині YOZ задана пряма, яка проходить через точку $A(0, a)$ і утворює з віссю OY кут φ . Рівняння прямої $z - a = kx$, де $k = \operatorname{tg} \varphi$. Нижній конус утворюється при обертанні нижньої пів прямої навколо осі OZ.

Рівняння кругового конуса з вершиною в точці A (0;0;a) і віссю OZ має вигляд:

$$(z - a)^2 = k^2(x^2 + y^2),$$

де $k = \operatorname{tg} \varphi$, φ – кут нахилу твірної конуса до площини XOY.

Перетнемо конус площиною (π), яка проходить через вісь OX і утворює з площиною XOY кут α .

Вектор нормалі до площини (π): $\vec{n} = (0; \sin \alpha \cos \alpha)$.

Рівняння площини (π):

$$\sin \alpha \cdot y + \cos \alpha \cdot z = 0.$$

Крива L, яка утворюється при перетині конуса та площини (π) задовольняє системі:

$$L: \begin{cases} (z - a)^2 = k^2(x^2 + y^2), \\ \sin \alpha \cdot y + \cos \alpha \cdot z = 0. \end{cases}$$

Для спрощення рівняння кривої L введемо нову систему координат $OX'Y'Z'$. Перехід від системи координат OXYZ до системи $O'Y'Z'$ полягає в тому, що вісь OX співпадає з віссю OX' , а в площині OYZ система координат $OY'Z'$ повернулася на кут $(-\alpha)$. Традиційні формули перетворення системи координат XOY в систему $X'OY'$, які означають поворот на кут α мають вигляд

$$\begin{cases} x = \cos \alpha \cdot x' - \sin \alpha \cdot y' \\ y = \sin \alpha \cdot x' + \cos \alpha \cdot y' \end{cases}$$

Формули переходу від $OXYZ$ до $OX'Y'Z'$ мають вид:

$$\begin{cases} x = x', \\ y = \cos \alpha \cdot y' + \sin \alpha \cdot z', \\ z = -\sin \alpha \cdot y' + \cos \alpha \cdot z'. \end{cases}$$

Рівняння конічного перерізу в нових координатах має вид:

$$\begin{cases} (\sin \alpha \cdot y' + \cos \alpha \cdot z' - a)^2 = k^2 (x^2 + (\cos \alpha \cdot y' + \sin \alpha \cdot z')^2) \\ \sin \alpha (\cos \alpha \cdot y' + \sin \alpha \cdot z') + \cos \alpha (-\sin \alpha \cdot y' + \cos \alpha \cdot z') = 0 \end{cases}.$$

Рівняння кривої L в системі координат $OX'Y'Z'$ має вид:

$$L: \begin{cases} z' = 0, \\ k^2 (x')^2 + \cos^2 \alpha \cdot (k^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot (y')^2 - 2a \sin \alpha \cdot y' - a^2 = 0 \end{cases}$$

Конічний переріз є кривою другого порядку.

Якщо січна площина (π) така, що:

- 1) $\alpha = 0$, то крива L – коло;
- 2) $\alpha < \varphi$, то крива L – еліпс;
- 3) $\alpha = \varphi$, то крива L – парабола;
- 4) $\alpha > \varphi$, то крива L – гіпербола.

Прилад Леонардо складається з двох дошок, триноги та «циркуля». Дві дошки (горизонтальна площина XOY та похила площина (π)) перетинаються під кутом α по осі OX . Папір для рисунка кріпиться на похилій дошці. На горизонтальній дошці стоїть тринога. Тринога $AQRS$ складається з трьох стержнів AR , AS , AQ таких, що коли кінці RSQ лежать на горизонтальній площині XOY (точки R та S на осі OX), то площина ARS перпендикулярна до площини XOY . Нехай AO є перпендикуляр до площини XOY , $AO = a$. «Циркуль» AOC має дві ніжки. Одна ніжка AO фіксованої довжини, коротка, опорна та співпадає з віссю конуса. Друга ніжка AC – довга, змінної довжини; фактично AC – це трубочка, в якій ковзає грифель, що малює криву. Кут OAC дорівнює $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Крива малюється в два кроки: спочатку одна вітка, починаючи з вершини, а потім так само інша. Грифель AC ковзає вниз під власною вагою або за рахунок додаткової ваги закріпленій на нитці. Модель досконалого циркуля зберігається у Флоренції у музеї історії науки, вона виготовлена у 2001 році по ескізу Леонардо да Вінчі.

Література

1. Наука и жизнь, №6, 2012.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк, Аналитическая геометрия, Наука, Москва, 1968г.

Науковий керівник: В.О. Бородін