

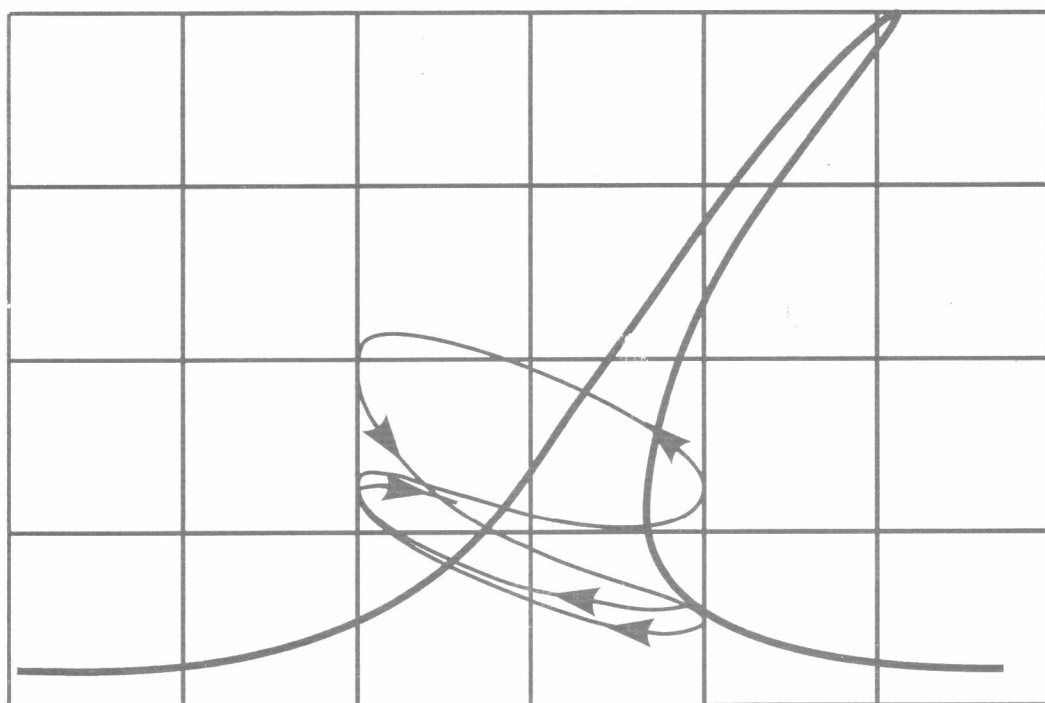
ISSN 1562-3076

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

Головний редактор
А.М. Самойленко

2013

Том 16 № 3



НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

Головний редактор:

A. M. САМОЙЛЕНКО

Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3
Київ, 01601, Україна
sam@imath.kiev.ua

Заступник головного редактора:

O. A. БОЙЧУК

Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3
Київ, 01601, Україна
boichuk@imath.kiev.ua

Редакційна колегія:

RAVI P. AGARWAL

Department of Mathematics
Florida Institute of Technology
Melbourne, FL 32901-6975, USA
agarwal@fit.edu

FIKRET A. ALIEV

Institute of Applied Mathematics
Z. Khalilov Street, 23
AZ 1148 Baku city, AZ-1073/L,
Azerbaijan Republic

E. A. ГРЕБЕНИКОВ

Вычислительный центр
Российской академии наук
ул. Вавилова, 40
Москва, 119991, Россия
gea@ipk.msk.su

YONG ZHOU

Xiangtan University
Hunan 411105, P.R. China
yzhou@xtu.edu.cn

I. KIGURADZE

A. Razmadze Mathematical Institute
Georgian Academy of Sciences
M. Aleksidze Str., 1
0193 Tbilisi, Georgia
kig@rmi.acnet.ge

I. O. ЛУКОВСЬКИЙ

Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
Київ, 01601, Україна
lukovsky@imath.kiev.ua

B. Л. МАКАРОВ

Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
Київ, 01601, Україна
makarov@imath.kiev.ua

A. A. МАРТИНЮК

Інститут механіки
НАН України
вул. Нестерова, 3
Київ, 03057, Україна

JEAN MAWHIN

Département de Mathématique
Université Catholique de Louvain
Chemin du Cyclotron, 2
B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
mawhin@math.ucl.ac.be

KENNETH J. PALMER

Department of Mathematics
National Taiwan University
Taipei, Taiwan
remlapk@hotmail.com

M. O. ПЕРЕСТЮК

Київський університет
ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64
Київ, 01033, Україна
pmo@mechmat.univ.kiev.ua

P. I. ПЕТРИШИН

Чернівецький університет
ім. Ю. Федьковича
вул. М. Коцюбинського, 2
Чернівці, 58012, Україна
rompetr@math.chdu.cv.ua

B. A. ПЛИСС

Санкт-Петербургский
государственный университет
ул. Библиотечная, 2
Санкт-Петербург, 198904, Россия
vapliiss@vp2915.spb.edu

A. K. ПРИКАРПАТСЬКИЙ

Інститут прикладних проблем
механіки і математики НАН України
ім. Я. Підстригача
вул. Наукова 3-6
Львів, 79060, Україна
pryk.anat@ua.fm

Н. Х. РОЗОВ

Московский государственный
университет им. М. Ломоносова
Воробьевы горы
Москва, 119899, Россия
rozov@rozov.mccme.ru

MIKLÓS RONTÓ

Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék
H-3515 Miskolc-Egyetemváros
Magyarország
matronto@gold.uni-miskolc.hu

A. M. РОНТО

(Виконавчий редактор)
Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
Київ, 01601, Україна
ar@imath.kiev.ua

B. Г. САМОЙЛЕНКО

Київський університет
ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64
Київ, 01033, Україна
svhr@mechmat.univ.kiev.ua

GEORGE R. SELL

University of Minnesota
School of Mathematics
206 Church Street, S.E.
Minneapolis, MN 55455, USA
Fax: +612 626 2017
sell@math.umn.edu

B. I. ТКАЧЕНКО

Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
Київ, 01601, Україна
vitk@imath.kiev.ua

SERGEI TROFIMCHUK

Institute of Mathematics and Physics
University of Talca
Talca, Casilla 747, Chile
trofimch@inst.mat.utalca.cl

MILAN TVRDÝ

Matematický ústav AV ČR
Žitná 25, 115 67, Praha 1
Česká Republika
tvrdy@math.cas.cz

MAURO FABRIZIO

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Piazza di Porta S. Donato, 5
40127 Bologna, Italia
fabrizio@dm.UniBo.it

LEON O. CHUA

Department of Electrical Engineering
University of California
Berkley CA 94720, USA
Fax: +510 845 4267

УДК 517.9; 519.3

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

В. О. Капустян

Нац. техн. ун-т України "КПІ"
Україна, 03056, Київ, просп. Перемоги, 37
e-mail: kapustyanv@ukr.net

О. А. Капустян

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, просп. Акад. Глушкова, 4д
e-mail: olena.kap@gmail.com

О. К. Мазур

Нац. ун-т харчових технологій
Україна, 01601, Київ 33, вул. Володимирська, 68

We prove that an optimal control problem for a Poisson equation with nonlocal boundary-value conditions in a circular sector has a classical solution in the class of distributed controls.

Доказана разрешимость в классическом смысле задачи оптимального управления в классе распределенных управлений для уравнения Пуассона с нелокальными краевыми условиями в круговом секторе.

Вступ. Теорія лінійно-квадратичних задач оптимального керування розподіленими системами є добре розвиненою [1, 2]. У багатьох випадках початкову задачу можна розщепити за допомогою методу Фур'є [3–5]. Задача керування еліптичним рівнянням з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі [6], що розглядається у цій статті, не допускає ні повного розщеплення, ні застосування L^2 -теорії. Її розв'язність у класі розподілених керувань вдається одержати шляхом використання біортонормованих систем функцій [7] та при подальшому аналізі розв'язків матричних рівнянь Фредгольма.

Постановка задачі. В круговому секторі $Q = \{(r, \theta) | r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi)\}$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{aligned}\Delta y &:= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(r, \theta), \quad (r, \theta) \in Q, \\ y(1, \theta) &= p(\theta), \quad p(0) = 0, \\ y(r, 0) &= 0, \quad r \in (0, 1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, 0) &= \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \pi), \quad r \in (0, 1).\end{aligned}\tag{1}$$

$$J(y, u) = \|y(\alpha)\|_D^2 + \int_0^1 \|u(r)\|_D^2 dr \rightarrow \inf, \quad (2)$$

де $p \in C^1([0, \pi])$ — задана функція, $\alpha \in (0, 1)$ — фіксоване число, $\|\cdot\|_D$ — норма в $L^2(0, \pi)$, еквівалентна стандартній, що задається рівністю

$$\|v\|_D = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \right)^{1/2},$$

де $n \geq 1$, $v_n = \int_0^\pi v(\theta) \psi_n(\theta) d\theta$, $\psi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2}$, $\psi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2} (\pi - \theta) \sin 2n\theta$, $\psi_{2n-1}(\theta) = \frac{4}{\pi^2} \cos 2n\theta$.

Метою роботи є встановлення класичної розв'язності задачі (1), (2), тобто знаходження оптимального серед допустимих процесів $\{u, y\} \in C(\bar{Q}) \times (C(\bar{Q}) \cap C^2(Q))$. Для застосування спектрального методу використовуються біортонормовані і повні в $L^2(0, \pi)$ системи функцій Самарського – Іонкіна [7]

$$\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{та} \quad \Phi = \{\varphi_0(\theta) = \theta, \quad \varphi_{2n}(\theta) = \sin 2n\theta, \quad \varphi_{2n-1}(\theta) = \theta \cos 2n\theta\}_{n=1}^{\infty}. \quad (3)$$

Тоді для будь-якого $u \in L^2(Q)$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \varphi_n(\theta), \quad (4)$$

де $u_n(r) = \int_0^\pi u(r, \theta) \psi_n(\theta) d\theta$. Отже, розв'язок задачі (1) будемо шукати у вигляді

$$y(r, \theta) = y_0(r)\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (y_{2n-1}(r)\theta \cos 2n\theta + y_{2n}(r) \sin 2n\theta), \quad (5)$$

де функції $\{y_k(r)\}_{k=0}^{\infty}$ є розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dy_0}{dr} \right) = r u_0(r), \quad y_0(1) = p_0, \quad (6)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dy_{2k-1}}{dr} \right) - (2k)^2 y_{2k-1} = r^2 u_{2k-1}(r), \quad y_{2k-1}(1) = p_{2k-1}, \quad (7)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dy_{2k}}{dr} \right) - (2k)^2 y_{2k} - 4k y_{2k-1} = r^2 u_{2k}(r), \quad y_{2k}(1) = p_{2k}, \quad (8)$$

$$p_k = \int_0^\pi p(\theta) \psi_k(\theta) d\theta.$$

Таким чином, початкова задача (1), (2) зводиться до наступної: на допустимих парах $\{u_n(r), y_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ задачі (6)–(8) мінімізувати критерій якості

$$J(y, u) = y_0^2(\alpha) + \int_0^1 u_0^2(r) dr + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{2k-1}^2(\alpha) + y_{2k}^2(\alpha) + \int_0^1 (u_{2k-1}^2(r) + u_{2k}^2(r)) dr) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k. \quad (9)$$

При цьому оптимальний процес $\{\tilde{u}_n(r), \tilde{y}_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ повинен бути таким, щоб формула (4) визначала функцію з $C(\bar{Q})$, а формула (5) — функцію з $C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$.

Основні результати. Структура задачі (6)–(9) дозволяє редукувати її до послідовності наступних задач:

$$\text{на розв'язках (6) мінімізувати функціонал } J_0 = J_0(u_0), \quad (10)$$

$$\text{на розв'язках (7), (8) мінімізувати функціонал } J_k = J_k(u_{2k-1}, u_{2k}), \quad k \geq 1. \quad (11)$$

При фіксованих $\{u_k(r)\}_{k=0}^{\infty} \subset C([0, 1])$ розв'язки задачі (6)–(8) мають вигляд

$$y_0(r) = p_0 - \int_r^1 \left(\frac{1}{s} \int_0^s \xi u_0(\xi) d\xi \right) ds = p_0 + \int_0^1 G_0(r, s) u_0(s) ds, \quad (12)$$

де

$$G_0(r, s) = \begin{cases} s \ln r, & s \in [0, r], \\ s \ln s, & s \in [r, 1], \end{cases}$$

$$y_{2k-1}(r) = p_{2k-1} r^{2k} + \frac{1}{4k} \int_0^1 s G_k(r, s) u_{2k-1}(s) ds, \quad (13)$$

$$G_k(r, s) = \begin{cases} s^{2k} (r^{2k} - r^{-2k}), & s \in [0, r], \\ r^{2k} (s^{2k} - s^{-2k}), & s \in [r, 1], \end{cases}$$

$$y_{2k}(r) = p_{2k} r^{2k} + p_{2k-1} r^{2k} t \ln r + \frac{1}{4k} \int_0^1 s G_k(r, s) u_{2k}(s) ds + \frac{1}{4k} \int_0^1 s \bar{G}_k(r, s) u_{2k-1}(s) ds, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\bar{G}_k(r, s) &= \int_0^1 p^{-1} G_k(r, p) G_k(p, s) dp = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2k} \left(\left(\frac{s}{r} \right)^{2k} - (rs)^{2k} \right) + r^{2k} s^{2k} \ln(rs) - \left(\frac{s}{r} \right)^{2k} \ln \left(\frac{s}{r} \right), & s \in [0, r], \\ \frac{1}{2k} \left(\left(\frac{r}{s} \right)^{2k} - (rs)^{2k} \right) + r^{2k} s^{2k} \ln(rs) - \left(\frac{r}{s} \right)^{2k} \ln \left(\frac{r}{s} \right), & s \in [r, 1]. \end{cases}\end{aligned}$$

Лема 1. Для будь-якого $k \geq 0$ формули (12)–(14) визначають розв'язки

$$y_k \in C([0, 1]) \cap C^2(0, 1)$$

задачі (6)–(8).

Доведення. Оскільки y_k — розв'язки задачі (6)–(8), то достатньо показати, що $y_k \in C([0, 1]) \forall k \geq 0$. Позначимо $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$. Тоді $G_0 \in C(\Pi)$, $\max_{\Pi} |G_0(r, s)| = e^{-1}$, отже, $y_0 \in C([0, 1])$.

Для $k \geq 1$ $G_k \in C(\Pi \setminus \{0, 0\})$, $\max_{\Pi} |G_k(r, s)| \leq 1$, отже, $y_{2k-1} \in C([0, 1])$. Оскільки $x^k \ln x \in C([0, 1])$, $\max_{x \in [0, 1]} |x^k \ln x| = e^{-1} k^{-1}$, то для $\bar{G}_k \in C(\Pi \setminus \{0, 0\})$ маємо

$$\max_{\Pi} |\bar{G}_k(r, s)| \leq \frac{1}{k},$$

отже, $y_{2k} \in C([0, 1])$.

Лему доведено.

Теорема 1. Задачі (10), (11) мають єдиний розв'язок $\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$, причому $\tilde{u}_k \in C([0, 1])$ для будь-якого $k \geq 0$.

Доведення. З формул (12)–(14) випливає, що функціонали $J_0 : L^2(0, 1) \mapsto \mathbb{R}$, $J_k : L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \mapsto \mathbb{R}$ є строго опуклими, неперервними і коерцитивними. Це, згідно з [1], означає, що задачі (10), (11) мають єдиний розв'язок у просторах $L^2(0, 1)$ та $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ відповідно.

Прирівнюючи до нуля похідні Фреше від J_0 , J_k , одержуємо наступні інтегральні рівняння Фредгольма:

$$u_0(s) = - \int_0^1 G_0(\alpha, s) G_0(\alpha, p) u_0(p) dp - p_0 G_0(\alpha, s), \quad (15)$$

$$\begin{aligned}u_{2k-1}(s) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4k)^2} \int_0^1 [(s G_k(\alpha, s) p G_k(\alpha, p) + s \bar{G}_k(\alpha, s) p \bar{G}_k(\alpha, p)) u_{2k-1}(p) + \\ &+ 2s \bar{G}_k(\alpha, s) p G_k(\alpha, p) u_{2k}(p)] dp - p_{2k} \alpha^{2k} \frac{1}{4k} s G_k(\alpha, s) - \\ &- \left(p_{2k} \alpha^{2k} + p_{2k-1} \alpha^{2k} \ln \alpha \right) \frac{1}{4k} s \bar{G}_k(\alpha, s),\end{aligned} \quad (16)$$

$$u_{2k}(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4k)^2} \int_0^1 [2s G_k(\alpha, s) p \bar{G}_k(\alpha, p) u_{2k-1}(p) + s G_k(\alpha, s) p \bar{G}_k(\alpha, p) u_{2k}(p)] dp - \\ - \left(p_{2k} \alpha^{2k} + p_{2k-1} \alpha^{2k} \ln \alpha \right) \frac{1}{4k} s G_k(\alpha, s). \quad (17)$$

Оскільки $\max_{(p,s) \in \Pi} |G_0(\alpha, p) G_0(\alpha, s)| \leq e^{-2} < 1$, то рівняння (15) має єдиний розв'язок $\tilde{u}_0 \in C([0, 1])$.

Розглянемо матрицю $A_k(p, s)$ і вектор-функцію $f_k(s)$ вигляду

$$A_k(p, s) = \begin{pmatrix} s G_k(\alpha, s) p G_k(\alpha, p) + s \bar{G}_k(\alpha, s) p \bar{G}_k(\alpha, p) & 2s \bar{G}_k(\alpha, s) p G_k(\alpha, p) \\ 2s G_k(\alpha, s) p \bar{G}_k(\alpha, p) & s G_k(\alpha, s) p \bar{G}_k(\alpha, p) \end{pmatrix}, \\ f_k(s) = \begin{pmatrix} -p_{2k} \alpha^{2k} \frac{1}{4k} s G_k(\alpha, s) - \left(p_{2k} \alpha^{2k} + p_{2k-1} \alpha^{2k} \ln \alpha \right) \frac{1}{4k} s \bar{G}_k(\alpha, s) \\ - \left(p_{2k} \alpha^{2k} + p_{2k-1} \alpha^{2k} \ln \alpha \right) \frac{1}{4k} s G_k(\alpha, s) \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівнянь (16), (17) маємо, що вектор $z_k(s) = \begin{pmatrix} u_{2k-1}(s) \\ u_{2k}(s) \end{pmatrix}$ задовольняє рівняння

$$z_k(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4k)^2} \int_0^1 A_k(p, s) z_k(p) dp + f_k(s). \quad (18)$$

На підставі оцінок з леми 1 маємо

$$\max_{\Pi} \|A_k(p, s)\| \leq 4, \quad \max_{s \in [0, 1]} \|f_k(s)\| \leq \frac{\alpha^{2k-1}}{2k} (|p_{2k}| + |p_{2k-1}|).$$

Тоді для будь-якого $k \geq 1$ рівняння (18) має єдиний розв'язок $\tilde{z}_k(s) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{2k-1}(s) \\ \tilde{u}_{2k}(s) \end{pmatrix} \in C([0, 1])$, і при цьому для будь-якого $r \in [0, 1]$

$$|\tilde{u}_{2k-1}(r)| \leq \frac{\alpha^{2k-1}}{k} (|p_{2k-1}| + |p_{2k}|), \quad |\tilde{u}_{2k}(r)| \leq \frac{\alpha^{2k-1}}{k} (|p_{2k-1}| + |p_{2k}|). \quad (19)$$

Теорему доведено.

З оцінок (19) випливає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(r) \varphi_n(\theta)$ збігається рівномірно на $\bar{Q}$ і за формулою (4) визначає функцію $\tilde{u}(r, \theta) \in C(\bar{Q})$.

Теорема 2. Ряд

$$\tilde{y}_0(r) \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{y}_{2n-1}(r) \theta \cos 2n\theta + \tilde{y}_{2n}(r) \sin 2n\theta),$$

де $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^\infty$ — розв'язки системи (6)–(8) з керуваннями $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^\infty$, за формулою (5) визначає функцію $\tilde{y}(r, \theta) \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$.

Доведення. За формулами (12)–(14) шуканий ряд має вигляд

$$\begin{aligned} p_0 \theta + \theta \int_0^1 G_0(r, s) u_0(s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} (p_{2n-1} r^{2n} \theta \cos 2n\theta + (p_{2n} r^{2n} + p_{2n-1} r^{2n} \ln r) \sin 2n\theta) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \theta \cos 2n\theta \frac{1}{4n} \int_0^1 s G_n(r, s) \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\theta \left(\frac{1}{4n} \int_0^1 s G_n(r, s) \tilde{u}_{2n}(s) ds + \frac{1}{4n} \int_0^1 s \bar{G}_n(r, s) \tilde{u}_{2n-1}(s) ds \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Функції $r^{2n} \sin 2n\theta$ і $r^{2n}(\ln r \sin 2n\theta + \theta \cos 2n\theta)$ є гармонічними, $p \in C^1([0, \pi])$, $p(0) = 0$, отже, згідно з [6], перший ряд у (20) є функцією з класу $C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$.

З леми 1 та оцінок (19) за ознакою Вейерштрасса маємо, що $\tilde{y} \in C(\bar{Q})$.

Залишилося дослідити рівномірну на $[a, b] \times [c, d] \subset (0, 1) \times (0, \pi)$ збіжність рядів з похідних по r, θ першого та другого порядку від функцій

$$B_n(r, \theta) = \frac{1}{4n} \int_0^1 s G_n(r, s) \tilde{u}_{2n-1}(s) ds \theta \cos 2n\theta = b_n(r) \theta \cos 2n\theta,$$

$$C_n(r, \theta) = \frac{1}{4n} \int_0^1 s G_n(r, s) \tilde{u}_{2n}(s) ds \sin 2n\theta = c_n(r) \sin 2n\theta,$$

$$D_n(r, \theta) = \frac{1}{4n} \int_0^1 s \bar{G}_n(r, s) \tilde{u}_{2n-1}(s) ds \sin 2n\theta = d_n(r) \sin 2n\theta.$$

З оцінок (19) одержимо, що ряди з похідних $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ збігаються на $\bar{Q}$ рівномірно за ознакою Вейерштрасса.

Для будь-яких $r \in [a, b]$, $n > 1$

$$b_n(r) = \frac{1}{4n} \left((r^{2n} - r^{-2n}) \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + r^{2n} \int_r^1 (s^{2n+1} - s^{1-2n}) \tilde{u}_{2n-1}(s) ds \right), \quad (21)$$

$$b'_n(r) = \frac{1}{2} (r^{2n-1} + r^{-2n-1}) \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \frac{1}{2} r^{2n-1} \int_r^1 (s^{2n+1} - s^{1-2n}) \tilde{u}_{2n-1}(s) ds$$

(доданки, які не містять інтегралів, взаємно знищуються),

$$b_n''(r) = \frac{1}{2} ((2n-1)r^{2n-2} + (-2n-1)r^{-2n-2}) \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\ + \frac{1}{2} (2n-1)r^{2n-2} \int_r^1 (s^{2n+1} - s^{1-2n}) \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \tilde{u}_{2n-1}(r). \quad (22)$$

Оскільки $\int_0^r s^{2n+1} ds = \frac{r^{2n+2}}{2n+2}$,

$$\int_r^1 (s^{2n+1} - s^{1-2n}) ds = -\frac{n}{1-n^2} - \frac{r^{2n+2}}{2n+2} + \frac{r^{2-2n}}{2-2n},$$

то існує $C_1 > 0$ таке, що

$$|b_n'(r)| \leq \frac{C_1}{n} \frac{\alpha^{2n-1}}{n} (|p_{2n-1}| + |p_{2n}|),$$

а отже, ряди $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} B_n(r, \theta)$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} C_n(r, \theta)$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} B_n(r, \theta)$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} C_n(r, \theta)$ збігаються рівномірно на $[a, b] \times [c, d]$.

З тих же оцінок $|b_n''(r)| \leq C_2 \frac{\alpha^{2n-1}}{n} (|p_{2n-1}| + |p_{2n}|)$ і, таким чином, ряди $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_n(r, \theta)$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_n(r, \theta)$ збігаються рівномірно на $[a, b] \times [c, d]$.

Для функції $d_n(r)$ маємо

$$d_n(r) = \frac{1}{8n^2} r^{-2n} \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds - \frac{1}{8n^2} r^{2n} \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\ + \frac{1}{4n} r^{2n} \int_0^r s^{2n+1} \ln s \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \frac{1}{4n} r^{2n} \ln r \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds - \\ - \frac{r^{-2n}}{4n} \int_0^r s^{2n+1} \ln s \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \frac{r^{-2n} \ln r}{4n} \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\ + \frac{1}{8n^2} r^{2n} \int_r^1 s^{-2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds - \frac{1}{8n^2} r^{2n} \int_r^1 s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\ + \frac{1}{4n} r^{2n} \int_r^1 s^{2n+1} \ln s \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \frac{1}{4n} r^{2n} \ln r \int_r^1 s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4n} r^{2n} \ln s \int_r^1 s^{-2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \frac{1}{4n} r^{2n} \int_r^1 s^{-2n+1} \ln r \tilde{u}_{2n-1}(s) ds, \\
d'_n(r) = & -\frac{1}{4n} r^{-2n-1} \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds - \frac{1}{4n} r^{2n-1} \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\
& + \frac{1}{2} r^{2n-1} \int_0^r s^{2n+1} \ln s \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \frac{1}{4n} (2nr^{2n-1} \ln r + r^{2n-1}) \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\
& + \frac{1}{2} r^{-2n-1} \int_0^r s^{2n+1} \ln s \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\
& + \frac{1}{4n} (-2nr^{-2n-1} \ln r + r^{-2n-1}) \int_0^r s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\
& + \frac{1}{4n} r^{2n-1} \int_r^1 s^{-2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds - \frac{1}{4n} r^{2n-1} \int_r^1 s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\
& + \frac{1}{2} r^{2n-1} \int_r^1 s^{2n+1} \ln s \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \frac{1}{4n} (2nr^{2n-1} \ln r + r^{2n-1}) \int_r^1 s^{2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds - \\
& - \frac{1}{4n} (2nr^{2n-1} \ln r + r^{2n-1}) \int_r^1 s^{-2n+1} \tilde{u}_{2n-1}(s) ds + \\
& + \frac{1}{2} r^{2n-1} \int_r^1 s^{-2n+1} \ln s \tilde{u}_{2n-1}(s) ds \quad \forall r \in [a, b].
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_0^r s^{2n+1} \ln s ds = \frac{1}{2n+2} r^{2n+2} \ln r - \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)^2},$$

то існує $C_3 > 0$ таке, що

$$|d'_n(r)| \leq \frac{C_3}{n} \frac{\alpha^{2n-1}}{n} (|p_{2n-1}| + |p_{2n}|),$$

отже, ряди $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} D_n(r, \theta)$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} D_n(r, \theta)$ збігаються рівномірно на $[a, b] \times [c, d]$.

Легко бачити, що існує $C_4 > 0$ таке, що

$$|d_n''(r)| \leq C_4 \frac{\alpha^{2n-1}}{n} (|p_{2n-1}| + |p_{2n}|),$$

отже, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} D_n(r, \theta)$ збігається рівномірно на $[a, b] \times [c, d]$.

Таким чином, $\tilde{y} \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$, і теорему доведено.

Зауваження. Якщо $u(r, \theta) \in C(\bar{Q})$ і з деякою константою $C > 0 \forall n \geq 1 : |u_n(r)| \leq \frac{C}{n^2}$, то керування u є допустимим у задачі (1), (2), тобто відповідна функція $y(r, \theta)$ з (5) визначає класичний розв'язок (1).

Висновки. У роботі доведено розв'язність задачі оптимального керування на класичних розв'язках еліптичної крайової задачі в круговому секторі з рівністю потоків на радіусах та рівністю нулю розв'язку на одному з радіусів у класі розподілених керувань для квадратичного критерію якості.

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
2. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 463 с.
3. Белозеров В. Е., Капустян В. Е. Геометрические методы модального управления. — Киев: Наук. думка, 1999. — 259 с.
4. Капустян В. Е. Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 6. — С. 58–67.
5. Капустян В. Е., Наконечный А. Г. Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 6. — С. 44–57.
6. Моисеев Е. И., Амбарцумян В. Э. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней системе // Дифференц. уравнения. — 2010. — 46, № 5. — С. 718–725.
7. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. — 1977. — 13, № 2. — С. 294–304.

Одержано 22.04.13