

О.П. ЛОБОК, кандидат фізико-математичних наук

Б.М. ГОНЧАРЕНКО, доктор технічних наук

Національний університет харчових технологій

ОПТИМІЗАЦІЯ ЧАСУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ДИНАМІЧНИХ ПОХИБОК АСИМПТОТИЧНО СТІЙКИХ СПОСТЕРІГАЧІВ ПОВНОГО ТА НЕПОВНОГО ПОРЯДКУ

В даній роботі пропонується розв'язок задачі побудови таких оптимальних спостерігаючих пристроїв повного та неповного порядку, які забезпечують мінімальний час перехідного процесу динамічних похибок оцінювання параметрів вектора стану об'єкта і отже, гарантують якісне відновлення невимірюваних координат об'єкта.

В данной работе предлагается решение задачи построения таких оптимальных наблюдающих устройств полного и неполного порядка, которые обеспечивают минимальное время переходного процесса динамических погрешностей оценивания параметров вектора состояния объекта и следовательно, гарантируют качественное восстановление неизмеряемых координат объекта.

Ключові слова: *асимптотично стійкий спостерігаючий пристрій, спостерігачі повного та неповного порядку, оцінка стану, похибка оцінювання, оптимізація, матричне рівняння Ляпунова, нерівності Релея, час перехідного процесу.*

Ключевые слова: *асимптотически устойчивое наблюдающее устройство, наблюдатели полного и неполного порядка, оценка состояния, погрешность оценивания, оптимизация, матричное уравнение Ляпунова, неравенства Релея, время переходного процесса.*

Побудова регуляторів, зокрема оптимальних регуляторів в задачах АКОР [1,7,8], вимагає вимірів всіх параметрів вектора стану об'єкта керування. Але на практиці часто не всі параметри (фазові координати) доступні для вимірювання або через відсутність вимірювальних приладів, або через неможливість вимірювань (коли для вимірів доступні тільки деякі з параметрів стану, а інші ж в силу тих чи інших причин не доступні для вимірів). Вимірюють, як правило, вихідні змінні об'єкта, що є тільки деякими компонентами вектора стану або їх комбінацією, а це породжує труднощі задач керування. В цьому випадку необхідно спочатку на основі доступних вимірів відновити або оцінити вектор стану об'єкта, а потім вже переходити до аналітичної побудови регуляторів від оцінки стану. Задачі оцінки параметрів вектора стану об'єкта за доступними вимірами, тобто задачі синтезу спостерігачів розглядались в роботах [1,6,7]. В роботах [3,5] запропоновані спостерігачі, оптимальні за критерієм мінімуму динамічної похибки оцінювання. В даній роботі синтезуються спостерігачі, оптимальні за критерієм мінімізації часу перехідних процесів динамічної похибки спостерігаючих пристроїв.

Розглянемо деякий багатопараметричний динамічний об'єкт, який описується наступною лінеаризованою системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), & t > t_0, \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n -вимірний вектор параметрів стану об'єкта (тут і далі " T " – операція транспонування вектора або матриці), A – матриця розмірності $n \times n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ – m -вимірний вектор керування, B – матриця розмірності $n \times m$, що визначає канали керування, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ – початковий вектор стану об'єкта, t_0 – початковий момент часу спостереження за параметрами об'єкта.

Прийmemo далі, що допустимі спостереження за параметрами об'єкта описуються наступною моделлю

$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T$ – вектор результатів вимірювань деяких параметрів об'єкта, C – задана матриця спостереження розмірності $p \times n$, яка визначає множину вимірюваних параметрів або їх комбінацію.

Як зазначалось вище, при побудові автоматичних або оптимальних регуляторів однією з перших задач є задача відтворювання всіх параметрів об'єкта за результатами неповних спостережень (2), тобто задача знаходження оцінки $\tilde{x}(t)$ вектора стану $x(t)$, яка з плином часу наближалась би до вектора $x(t)$, тобто $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = x(t)$. Для розв'язання цієї задачі можна використати спостерігачі повного або неповного порядку [1,7]. Але одержані при цьому розв'язки є неоднозначними і передбачають вибір матриць підсилення спостерігачів з умови від'ємності дійсних частин їх власних значень. В даній роботі пропонується оптимальний вибір матриць підсилення спостерігаючих пристроїв повного та неповного порядку за умови мінімізації часу перехідних процесів динамічної похибки спостерігачів обох типів, причому із збереженням їх асимптотичної стійкості.

Розглянемо спочатку спостерігаючий пристрій повного порядку. Відомо [1,7], що даний тип спостерігачів можна побудувати за аналогією з вихідною математичною моделлю об'єкта (1), і оцінку $\tilde{x}(t)$ шукати в класі спостерігачів виду

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + K(t)(y(t) - C\tilde{x}(t)), \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0, \end{cases} \quad (3)$$

де $K(t)$ – матриця підсилення спостерігача розмірності $n \times p$, $\tilde{x}^0$ – заданий початковий стан спостерігача.

Зауважимо, що в даному випадку розмірності вектора параметрів об'єкта $x(t)$ і вектора оцінки параметрів $\tilde{x}(t)$ спостерігаючого пристрою (3) однакові.

Матрицю підсилення $K(t)$ зазвичай [7] шукають з умови забезпечення асимптотичної стійкості рівняння динамічної похибки оцінювання спостерігача (3) повного порядку

$$\begin{cases} \frac{de(t)}{dt} = (A - KC)e(t), \\ e(t_0) = e^0, \end{cases} \quad (4)$$

де $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ – вектор похибок оцінювання спостерігача, $e^0 = x(t_0) - \tilde{x}(t_0) = x^0 - \tilde{x}^0$.

В роботах [6,7] наведені спостерігачі неповного порядку, які дозволяють оцінити вектор невимірюваних параметрів $r(t)$ розмірності $(n - p)$ співвідношенням $\tilde{r}(t) = z(t) + Ky(t)$, де $z(t)$ – розв’язок наступної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = (D - KC)AL_2z + (D - KC)A(L_1 + L_2K)y + (D - KC)Bu, \\ z(t_0) = \tilde{r}^0 - Ky(t_0). \end{cases} \quad (5)$$

В останній системі $K = K(t)$ – матриця підсилення спостерігача розмірності $(n - p) \times p$; D – задана матриця, за допомогою якої формується вектор $r(t)$ невимірюваних координат вектора стану $x(t)$ за формулою $r(t) = Dx(t)$; L_1, L_2 – блочні прямокутні матриці розмірностей відповідно $n \times p$

та $n \times (n - p)$, які утворюють матрицю $L = L_1 \dot{L}_2 = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}^{-1}$, $\tilde{r}^0$ – заданий

початковий стан спостерігача. Оцінка вектора параметрів стану об’єкта $x(t)$ при цьому визначається співвідношенням $\tilde{x}(t) = L_1y(t) + L_2\tilde{r}(t)$.

Динамічну похибку оцінювання вектора невимірюваних параметрів стану об’єкта можна, використовуючи рівняння (1), (2), (5), визначити як розв’язок наступного рівняння

$$\begin{cases} \frac{de(t)}{dt} = D - KC \quad AL_2e(t), \\ e(t_0) = e^0, \end{cases} \quad (6)$$

де $e(t) = r(t) - \tilde{r}(t)$, $e^0 = Dx^0 - \tilde{r}^0$.

Об'єднуючи рівняння динамічних похибок оцінювання спостерігачів повного (4) та неповного порядку (6), одержимо узагальнене рівняння похибок

$$\begin{cases} \frac{de(t)}{dt} = A_K e(t), \\ e(t_0) = e^0, \end{cases} \quad (7)$$

де $A_K = R - KH$,

- $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, $e^0 = x(t_0) - \tilde{x}(t_0)$, $R = A$, $H = C$ – для спостерігачів повного порядку;
- $e(t) = r(t) - \tilde{r}(t)$, $e^0 = Dx(t_0) - \tilde{r}(t_0)$, $R = DAL_2$, $H = CAL_2$ – для спостерігачів неповного порядку.

Критерієм вибору матриці підсилення K може бути такий, при якому матриця A_K має власні значення з від'ємними дійсними частинами, і отже, система (7) є асимптотично стійкою. Це забезпечує згасання динамічної похибки спостерігача, причому тим швидше, чим “лівішими” (з більшим від'ємним значенням) будуть власні значення матриці A_K . Для побудови таких асимптотично стійких спостерігачів можна використати результати теорії модального керування [4,6,8]. Відомо [7], що для спостережуваної пари матриць R^T і H^T можна знайти матрицю K , при якій матриця A_K має наперед задані власні значення. Отже, вибираючи їх з деяких міркувань, можна побудувати нескінчену множину матриць K , при яких рівняння (7), а отже, і відповідний спостерігач буде асимптотично стійким. Для однозначного визначення цієї матриці можна використати критерій, зв'язаний з якісними показниками перехідних процесів рівняння похибки оцінювання стану об'єкта. За такий критерій можна взяти час перехідного процесу системи рівнянь похибок оцінювання (7).

Для розв'язання останньої задачі розглянемо попередньо задачу визначення верхньої оцінки часу перехідного процесу для динамічної похибки оцінювання спостерігачем компонентів вектора стану об'єкта. Для цього

використаємо другий метод Ляпунова дослідження стійкості динамічних систем [2], у відповідності до якого побудуємо функцію Ляпунова виду $V(t) = e^T(t)Pe(t) > 0$, де P – симетрична додатно визначена матриця (яку будемо в подальшому позначати як $P = P^T > 0$) і яка є розв’язком наступного матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова

$$(A_K)^T P + PA_K = -Q, \quad (8)$$

в якому $Q = Q^T > 0$ – довільна симетрична додатно визначена матриця.

Використовуючи нерівності Релея [2]

$$\lambda_{\min}(W)e^T e \leq e^T W e \leq \lambda_{\max}(W)e^T e, \quad (9)$$

де $W = W^T > 0$ – довільна симетрична додатно визначена матриця, $\lambda_{\min}(W)$, $\lambda_{\max}(W)$ – мінімальне та максимальне власне значення матриці W , можна довести справедливості наступного співвідношення відносно функції Ляпунова $\frac{dV(t)}{dt} = -e^T(t)Qe(t) \leq -\alpha V(t)$, де

$$\alpha = \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P). \quad (10)$$

Розв’язуючи останню нерівність, маємо $V(t) \leq V(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)}$, звідки, враховуючи нерівності Релея (9), одержимо

$$e^T(t)e(t) \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (11)$$

де

$$\beta = \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P) (e^0)^T e^0. \quad (12)$$

Позначимо через T_p час перехідного процесу для рівняння динамічної похибки (7), тобто час, через який норма вектора похибок $\|e(t)\| = \sqrt{e^T(t)e(t)}$ буде задовольняти умові $\|e(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t > T_p$, де ε – розмір ε -“трубки”, за межі якої не повинні вийти параметри $e_i(t)$ вектора похибок $e(t)$.

З (11) випливає, що норма вектора похибок $\|e(t)\|$ буде задовільняти умові $\|e(t)\| < \varepsilon$ при таких значеннях часової змінної t , які задовільняють

нерівності $\beta e^{-\alpha(t-t_0)} \leq \varepsilon^2$. З цієї нерівності одержимо $t > t_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\beta}{\varepsilon^2}$. Отже, верхня оцінка часу перехідного процесу рівняння похибки (7) дорівнює

$$T_p = t_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\beta}{\varepsilon^2}, \quad (13)$$

де α та β визначаються відповідно за формулами (10) та (12), в яких P – є розв’язком матричного рівняння Ляпунова (8).

Аналогічно можна оцінити час перехідного процесу динамічної похибки для кожної компоненти (координати) $e_i(t)$ вектора $e(t)$:

$$|e_i(t)| < \varepsilon, \text{ для всіх } t > T_p, \text{ де } T_p = t_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\gamma}{\varepsilon^2}, \gamma = P_{ii}^{-1} \lambda_{\max}(P)(l^0)^T l^0, \alpha -$$

визначається співвідношенням (10), P_{ii}^{-1} – i -й діагональний елемент оберненої матриці P^{-1} .

Якщо коефіцієнти матриці A_K залежать від часової змінної t , тобто $A_K = A_K(t)$, то можна показати, що $\|e(t)\|_G = \sqrt{e^T(t) G e(t)} < \varepsilon$ для всіх $t > T_p$, де $G = G^T > 0$ – задана симетрична додатно визначена вагова матриця, причому $T_p = \max_k t_k^*$, де t_k^* – корені трансцендентного рівняння $f(t) = 0$, в якому

$$f(t) = \beta(t) e^{-\int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau} - \varepsilon^2. \text{ Тут функції } \alpha(t), \beta(t) \text{ визначаються співвідношеннями}$$

$$\alpha(t) = \frac{\lambda_{\min}(Q(t))}{\lambda_{\max}(P(t))}, \quad \beta(t) = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(P(t))} \lambda_{\max}(P_0)(l^0)^T l^0.$$

В останніх формулах матриця $P(t)$ – є розв’язком матричного диференціального рівняння Ляпунова виду

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -A_K^T(t)P(t) - P(t)A_K(t) - Q(t), \\ P(t_0) = P_0, \end{cases}$$

де $Q(t) = Q(t)^T > 0$, $P_0 = P_0^T > 0$ – довільні симетричні додатно визначені матриці.

Зауважимо, що при $G = E$, де E – одинична матриця, маємо $\|e(t)\|_G = \|e(t)\|_E = \|e(t)\|$, а при $G = a_i a_i^T$, де a_i – i -й орт, одержимо $\|e(t)\|_G = \|e(t)\|_{a_i a_i^T} = |e_i(t)|$, тобто перші два випадки є частинними випадками і впливають з третього.

Таким чином, для всіх розглянутих випадків маємо хоча і складний, але конструктивний вираз для критерію оптимальності $T_p = T_p(K)$.

Спостерігаючий пристрій повного або неповного порядку будемо називати оптимальним, якщо їх матриця підсилення K вибирається з умови мінімізації функції $T_p = T_p(K)$, тобто з умови $T_p(K) \rightarrow \min_{K \in \Omega_K}$, де $\Omega_K = \{K : \operatorname{Re}(\lambda(A_K)) = \operatorname{Re}(\lambda(R - KH)) < 0\}$ – множина матриць K , при яких всі власні значення матриці $A_K = R - KH$ мають від’ємні дійсні частини, тобто матриця A_K є асимптотично стійкою.

Сформульована задача відноситься до класу задач умовної оптимізації. Умова асимптотичної стійкості матриці A_K в загальному випадку є важко формалізованою, тому розглянемо частинний випадок, коли дана умова може бути представлена в конструктивному вигляді.

Нехай спостерігається тільки один параметр вектора стану об’єкта, який описується моделлю (1). Тоді матриця C моделі спостережень (2) перетворюється в вектор-рядок c^T , а матриця підсилення спостерігача K перетворюється в вектор-стовпчик k . Для цього випадку можна використати метод Аккермана [8] знаходження вектора k , який забезпечує бажане розташування власних значень матриці $A_k = R - kh$, де $h = c^T$ – для спостерігача повного порядку, $h = c^T A L_2$ – для спостерігача неповного порядку.

Відповідно до згаданого методу матриця A_k буде мати бажані власні значення, якщо вектор k визначається наступним співвідношенням

$$k^T = 0, 0, \dots, 0, 1 S^{-1} q(R), \quad (14)$$

де $S = h^T, R^T h^T, \dots, (R^T)^{n-1} h^T$, $q(R) = R^n + a_1 R^{n-1} + a_2 R^{n-2} + \dots + a_{n-1} R + a_n E$, a_i – коефіцієнти характеристичного полінома матриці A_k

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

які відповідають бажаним власним значенням $\lambda_i = \lambda_i(A_k)$ цієї матриці.

Співвідношення (14) забезпечує від’ємні власні значення матриці A_k , якщо коефіцієнти a_i вибираються згідно умови Гурвиця [4].

Таким чином, мінімальний час перехідного процесу динамічної похибки оцінювання параметрів стану об’єкта забезпечується вибором вектора підсилення $k = k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ спостерігача за формулою (14), в якій коефіцієнти характеристичного полінома a_i знаходяться з умови параметричної оптимізації $T_p(k(a_1, a_2, \dots, a_n)) \rightarrow \min_{a_i}$ і задовольняють умові Гурвиця.

За допомогою пакету MatLab проводилась числова реалізація запропонованих оптимальних спостерігачів та обчислювальні експерименти з ними при наступних початкових даних:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2085 & 1.0517 & 6.5923 \\ 0.8341 & -4.7931 & -3.6308 \\ -0.5830 & 3.1034 & 2.1846 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(t) = 0.3, \quad \varepsilon = 0.01, \quad t_0 = 0, \quad y(t) = Cx(t) = x_1(t), \text{ тобто}$$

спостерігається тільки перший параметр об’єкта (а інші параметри – недосяжні для вимірів).

Обчислювальні експерименти показали, що при довільному фіксованому векторі підсилення k час перехідного процесу T_p досягає мінімального значення при $Q = E$, де E – одинична матриця. Враховуючи це, в подальших експериментах використовувалось рівняння Ляпунова виду $(A_K)^T P + P A_K = -E$.

Подальші обчислювальні експерименти показали, що для спостерігача повного порядку мінімальний час перехідного процесу (значення критерію (13))

дорівнює $(T_p)_{\min} = 3.3682$ і досягається при оптимальному векторі підсилення спостерігача $k_{opt} = (48.4057, -36.0200, 51.3291)^T$.

Для спостерігача неповного порядку одержали мінімальний час перехідного процесу $(T_p)_{\min} = 1.1447$ при оптимальному векторі підсилення спостерігаючого пристрою $k_{opt} = (-0.2427, 1.0198)^T$.

Нижче наведені графіки компонентів вектору стану $x(t)$ (Рис. 1), їх оптимальні оцінки (Рис. 2) та динамічні похибки оцінювання параметрів вектору стану (Рис. 3) для спостерігача повного та неповного порядку.

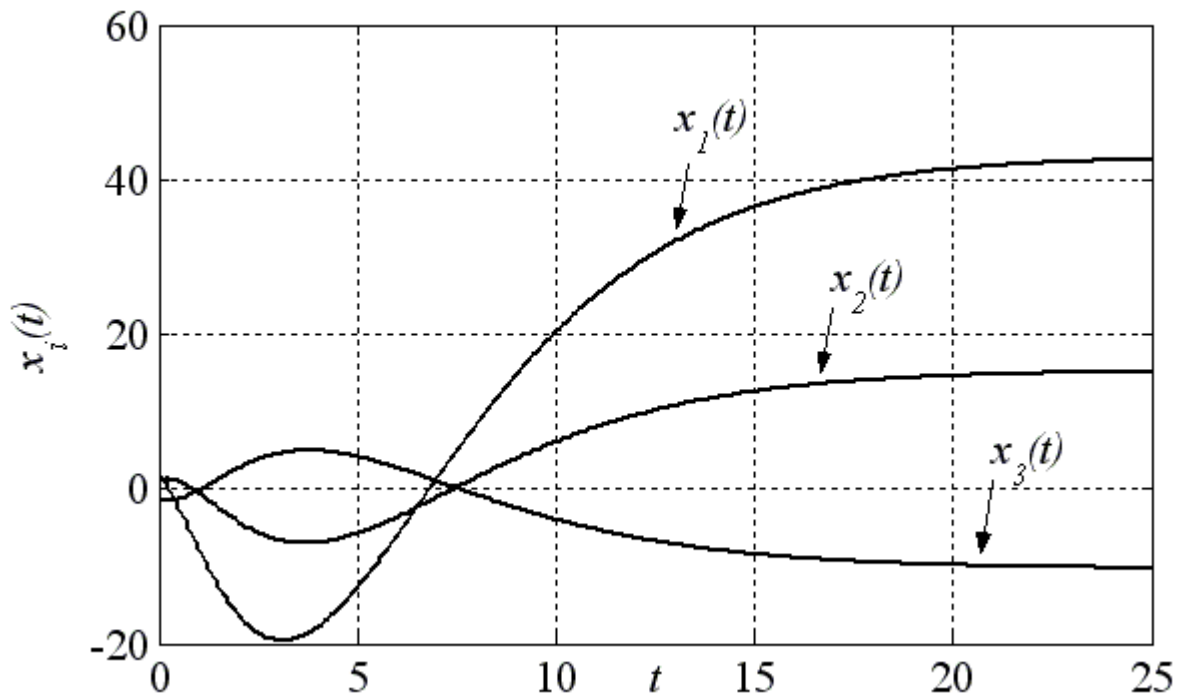
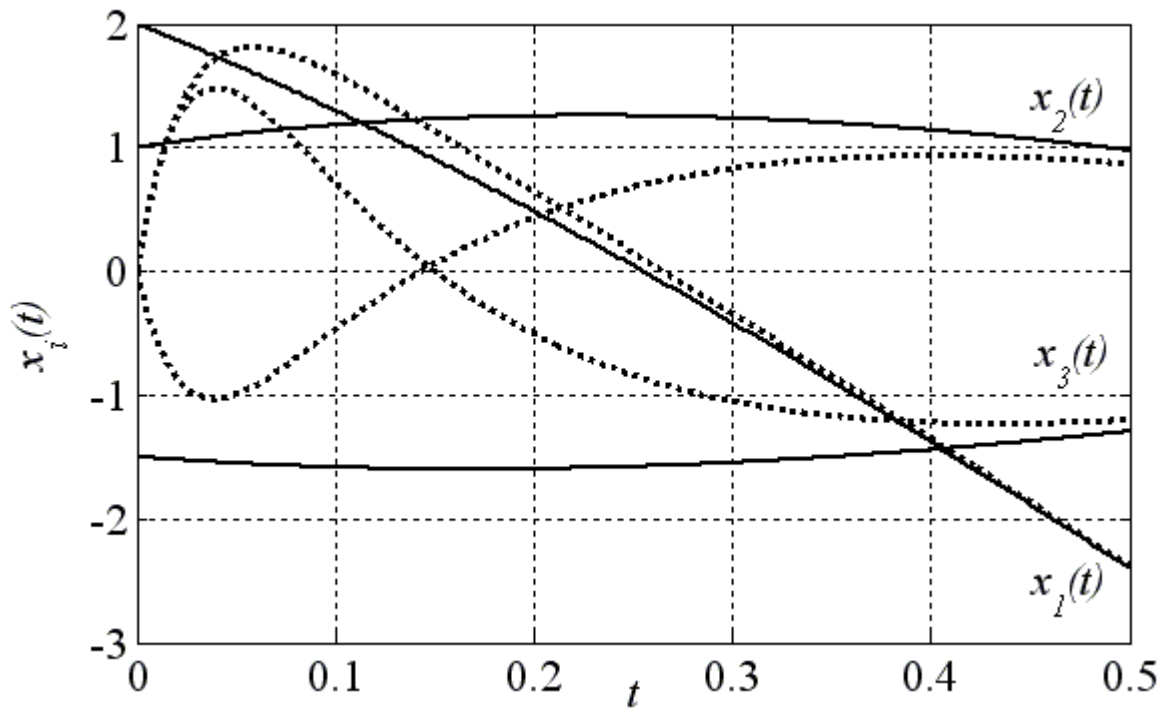
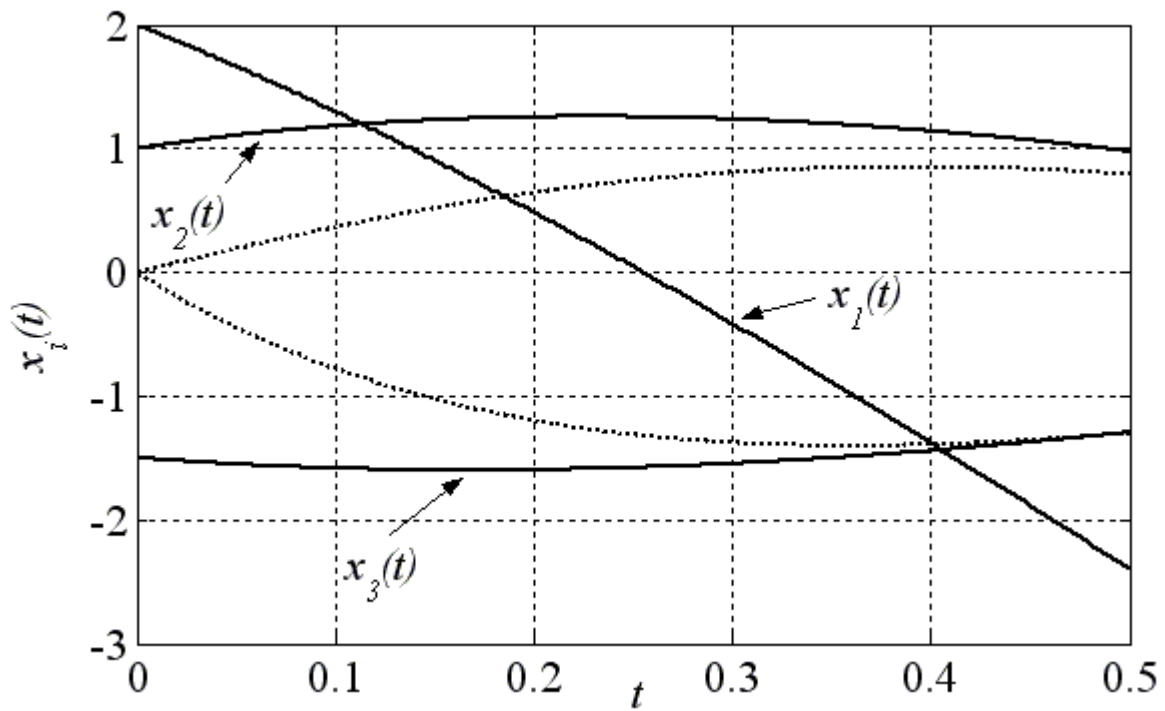


Рис. 1. Графіки параметрів вектора стану $x(t)$

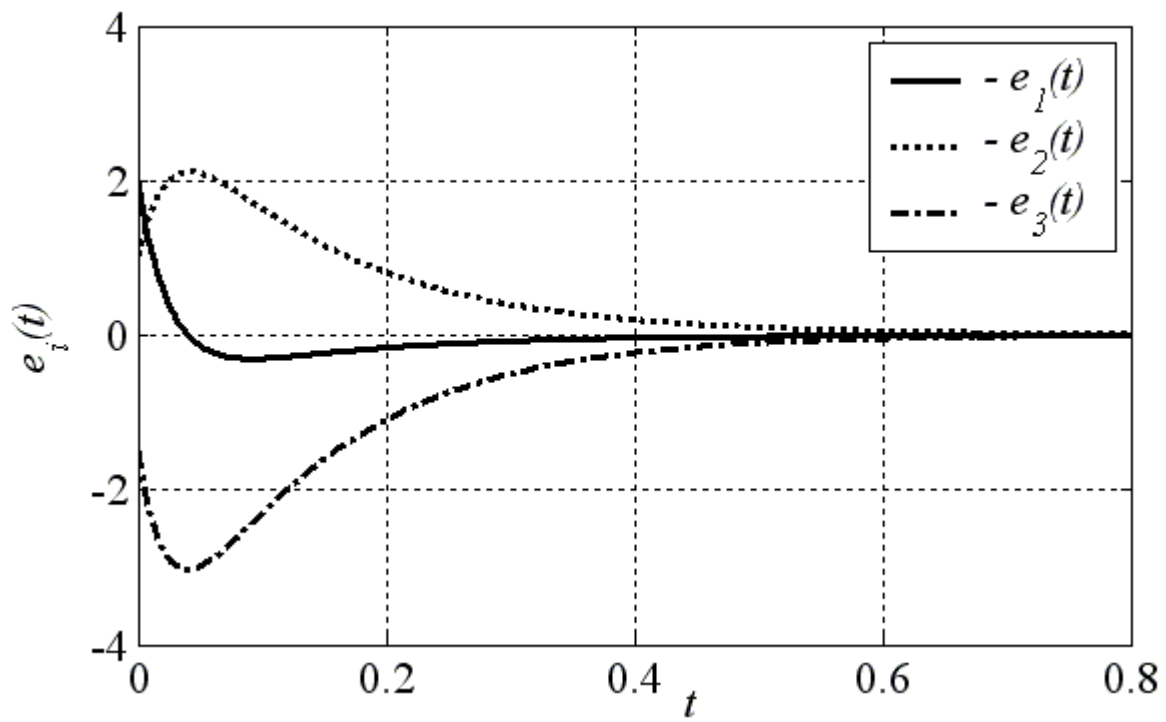


(а)

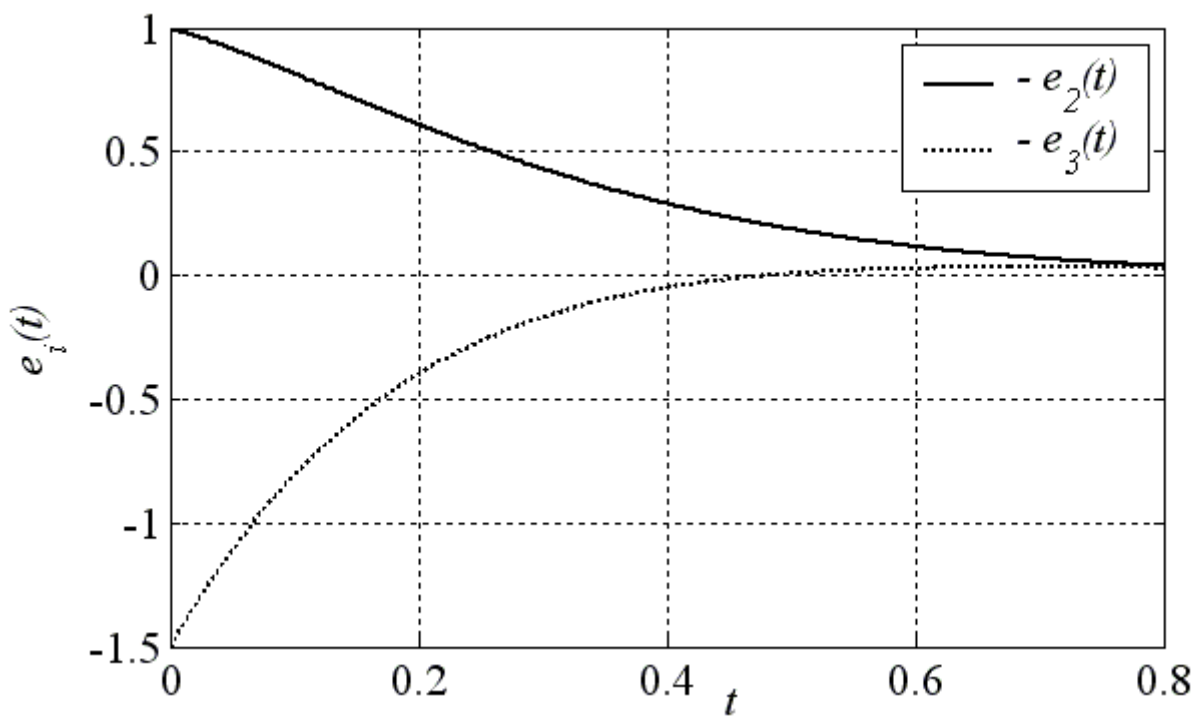


(б)

Рис. 2. Графіки параметрів стану об'єкта $x(t)$ (суцільна лінія) та їх оцінки (пунктирна лінія) для спостерігача повного (а) та неповного (б) порядку на початку часового інтервалу спостереження



(a)



(б)

Рис. 3. Динамічні похибки оцінювання $e_i(t)$ параметрів вектора стану $x(t)$ за допомогою спостерігача повного (а) та неповного (б) порядку

Обчислювальні експерименти показали суттєву перевагу оптимальних спостерігачів неповного порядку у порівнянні із спостерігачами повного порядку і за значенням мінімального часу перехідного процесу, і за якістю згасання динамічної похибки оцінювання.

Наступний поверхневий (просторовий) графік дає якісну картину залежності часу перехідного процесу від комплексно-спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = x \pm iy$ матриці $A_k = (D - kc^T)AL_2$ рівняння похибок (7) для спостерігача неповного порядку.

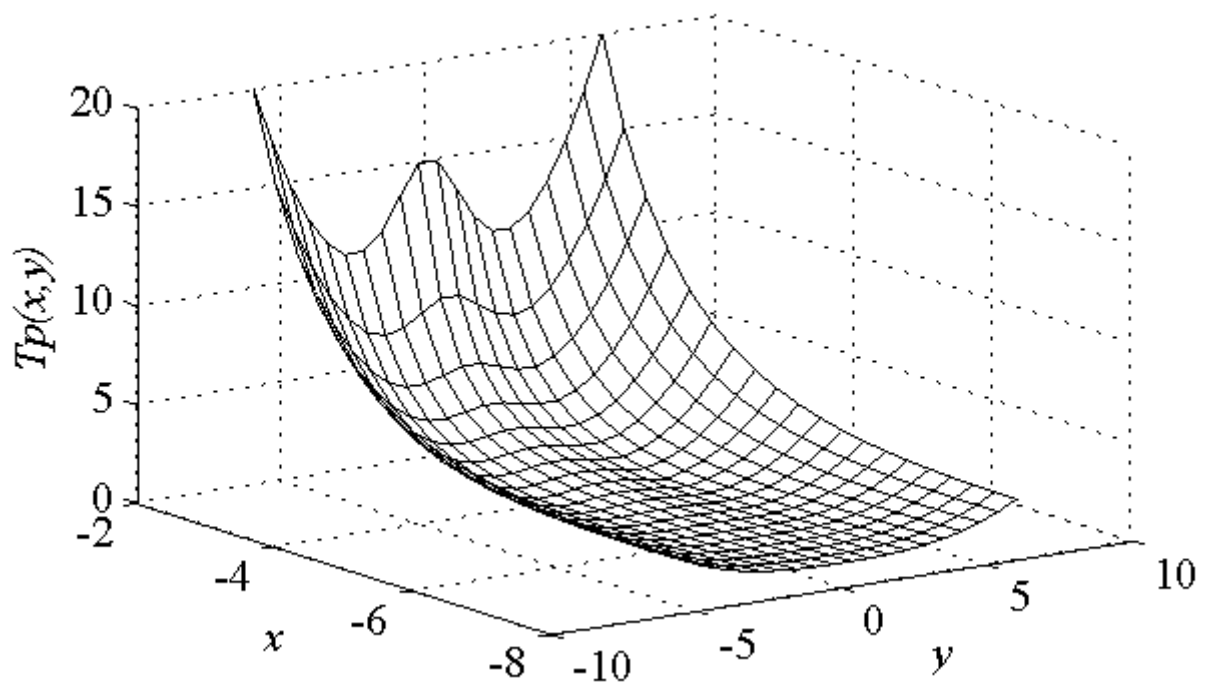


Рис. 4. Залежність часу перехідного процесу динамічної похибки оцінювання компонентів вектора стану об'єкта для спостерігача неповного порядку від власних значень матриці рівняння похибок (7) $\lambda_{1,2} = x \pm iy$ (x - дійсна, y - уявна частина власних значень)

Висновок. Побудовані оптимальні спостерігачі забезпечують мінімальний час перехідного процесу, швидке згасання динамічної похибки оцінювання вектора стану об'єкта, а також якісне і з високою точністю відтворення параметрів об'єкта, недоступних для вимірів, для всього часового

проміжку функціонування об'єкта. Особливо ефективними виявились спостерігачі неповного порядку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.
2. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1974. – 223с.
3. Гончаренко Б.М, Лобок О.П. Синтез оптимальних спостерігачів повного порядку для багатовимірних об'єктів. (В цьому ж номері).
4. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К.: Выща школа, 1978. – 184 с.
5. Лобок О.П., Гончаренко Б.М. Синтез оптимальних асимптотично стійких спостерігачів неповного порядку для лінійних динамічних багатовимірних об'єктів. (В цьому ж номері).
6. Рей У. Методы управления технологическими процессами. – М.: Мир, 1983. – 368 с.
7. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування. – Житомир.: ЖІТІ, 1998. – 512 с.
8. Филиппс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с.

Одержана редколегією 00.06.08 р.