

АПРОКСИМАЦІЯ ОБМЕЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАРШОГО ПОРЯДКУ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗАДАЧ КОШІ В АБСТРАКТНОМУ ПРОСТОРІ

В.М. Романенко, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет харчових технологій

А.В. Чайковський, д-р фіз.-мат. наук

Київський національний університет ім. Т. Шевченка

Представлена доповідь дає змогу апроксимації обмеженого на всій осі розв'язку лінійного диференціального рівняння довільного порядку в банаховому просторі вигляду

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^{(k)}(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

розв'язками задач Коші з нульовими початковими умовами на заданому відрізку. Точність наближення визначається властивостями операторних коефіцієнтів та початковими точками для задач Коші. Отримані результати узагальнюють твердження з роботи [1], отримане для рівняння першого порядку.

Нехай $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір, $L(\mathbf{B})$ – множина лінійних неперервних операторів в $\mathbf{B}$, $\{A_k : 0 \leq k \leq n-1\} \subset L(\mathbf{B})$, оператори $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ попарно комутують.

Позначимо також $T := \{t : t \in \mathbf{R}\}$.

Лема 1. Нехай виконуються умова:

$$\forall z \notin T \exists \left(z^n I - \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k \right)^{-1} \in L(\mathbf{B}).$$

Тоді для довільної обмеженої на осі неперервної функції $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{B}$ існує єдиний обмежений разом з усіма похідними до $m-1$ порядку розв'язок $x \in C^m(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ диференціального рівняння (1).

Лема 2. Нехай виконуються умови леми 1. Тоді для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $y_1 \in C((-\infty, t_2], \mathbf{B})$, $y_2 \in C([t_1, +\infty), \mathbf{B})$, кожна з задач Коші

$$u_1^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_1^{(k)}(t) + y_1(t), \quad t \geq t_1, \quad u_1(t_1) = u_1'(t_1) = \dots = u_1^{(n-1)}(t_1) = \bar{0}, \quad (2)$$

$$u_2^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_2^{(k)}(t) + y_2(t), \quad t \leq t_2, \quad u_2(t_2) = u_2'(t_2) = \dots = u_2^{(n-1)}(t_2) = \bar{0}, \quad (3)$$

має єдиний m разів неперервно диференційовний розв'язок.

Отже, u_1, u_2 - розв'язки задач Коші (2) та (3). Покладемо $u(t) := u_1(t) + u_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

Теорема 1. Нехай $y \in C(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ – обмежена на осі функція, $x \in C^m(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ – відповідний їй обмежений розв'язок рівняння (1). Виконуються умови:

$$\forall z \notin T \quad \exists \left(z^n I - \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k \right)^{-1} \in L(\mathbf{B}).$$

Тоді існують сталі $C > 0$, $h > 0$, залежні лише від операторних коефіцієнтів і незалежні від функції y , такі, що виконується оцінка

$$\forall t \in [t_1, t_2] : \|x(t) - u(t)\| \leq C \left(e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)} \right) \|y\|_{\infty}. \quad (4)$$

Зауваження. 1. Теорема показує, що для довільного відрізка $[a, b]$ та значення $\varepsilon > 0$ можна обрати відрізок $[t_1, t_2] \supset [a, b]$ з настільки великими значеннями $t_2 - b, a - t_1$, що на цьому відрізку обмежений на осі розв'язок та сума розв'язків відповідних задач Коші будуть відрізнятись за нормою не більше, ніж на ε .

2. Коли оператор A_0 є необмеженим, матричний оператор H не буде секторіальним (див[2]) і до нього не можна застосувати результат статті [1].

В роботі наведені узагальнення відомих умов апроксимації обмеженого на осі розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку в абстрактному просторі розв'язками відповідних задач Коші на випадок рівнянь старших порядків.

Література:

1. *Городній М.Ф., Романенко В.М.* Апроксимація обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв'язками відповідних крайових задач // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, №4. – С. 548-552.

2. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985.