

ПРО ПОХІДНУ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

Р.В. Чабан, В.М. Сафонов

Нехай $f(x)$ - скінченна функція на інтервалі (a, b) . Скажемо, що d , $-\infty \leq d \leq +\infty$ є похідне число функції $f(x)$ в точці $x \in (a, b)$, якщо існує послідовність $h_k \rightarrow 0$ ($k=1, 2, \dots$) така, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} = d. \text{ При цьому, якщо } h_k > 0, \text{ то кажуть про праве похідне число, і, якщо } h_k < 0 -$$

про ліве. Очевидно, співпадання всіх похідних чисел означає існування звичайної похідної. Для довільної функції $f(x)$ в кожній точці $x \in (a, b)$ існують похідні числа.

Справедливе таке твердження:

$$\text{нехай задана неспадна функція } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ і при цьому } \lim_{n \rightarrow \infty} n \times \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right] = d. \text{ Тоді існує } f'(0).$$

Доведення цього твердження ґрунтується на основних властивостях границь.

Результат залишається вірним відносно $f(a)$ і $f(b)$ для будь-якої монотонності функції, заданої на довільному відрізку $[a, b]$.