УДК 621.372.061

М.А. МАРТЫНЕНКО, О.И. НОВИКОВА

ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ НА ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Приведена методика определения влияния малых сопротивлений на переходные процессы в распределительных цепях. Получены аналитические выражения решения телеграфных уравнений при малых потерях.

Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами (в линиях, обмотках электрических машин и т.п.) возникают при коммутациях, при передаче непериодических сигналов или под влиянием внешнего электромагнитного поля (например, при грозовых разрядах). Для исследования переходных процессов в однородных цепях с распределенными параметрами пользуются дифференциальными уравнениями в частных производных [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r i + L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial u}{\partial t} + g u, \end{aligned} \quad (1)$$

где r , L , C , g - параметры цепи на единицу длины; x - координата рассматриваемой точки, отсчитываемая от начала цепи; t - время; u , i - напряжение и ток цепи.

В общем виде решение этих дифференциальных уравнений достаточно сложно. Решение упрощается, если пренебречь потерями, т.е. считать, что r и g равны нулю. В этом случае из уравнений (1) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

решение которого имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \Phi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \Phi_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \quad (2)$$

$$\text{где } v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

С учетом (1) и (2) получаем выражение для тока цепи:

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\Phi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) - \Phi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \right], \quad (3)$$

где вид функции Φ зависит от граничного условия при $x=0$, т.е.

$$u(x, t) /_{x=0} = \Phi(t). \quad (4)$$

Итак, при отсутствии потерь в однородной цепи с распределенными параметрами напряжение и ток могут быть представлены как сумма и как разность двух волн, движущихся с одинаковой скоростью

$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ в противоположных направлениях, без изменения их формы. При этом в любой точке однородной цепи отношение напряжения и тока для прямой и обратной волн равно волновому сопротивлению

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

На практике цепи с распределенными параметрами обладают потерями, которые необходимо учитывать при расчетах. В [1, 2] такой вариант не рассматривался. Поэтому целью настоящей статьи является методика определения напряжения и тока цепи с учетом сопротивления.

Телеграфные уравнения при наличии сопротивления и при $g=0$ из (1) принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r i + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведем систему (5) к одному уравнению, для чего получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= r \frac{\partial i}{\partial t} + L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{C} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (6) система (5) приводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - rC \frac{\partial i}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Согласно условию нашей задачи, т.е. учету малости сопротивления имеем

$$r = \mu r_0, \quad (8)$$

где $\mu \ll 1$.

Запишем уравнение (7), используя (8):

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \mu r_0 C \frac{\partial i}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Как следует из формул (2) и (3), решение является функцией аргумента $(t - x/v)$ или $(t + x/v)$.

Естественно предположить, что решение уравнения (9) будет зависеть от μ , поэтому вводим новые переменные:

$$\begin{aligned} y &= x\mu, \\ \tau &= t - \frac{y}{\mu} \sqrt{LC}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для перехода в уравнении (9) к новым переменным необходимо найти все частные производные, которые в конечном итоге имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{\partial i}{\partial \tau} (-\sqrt{LC}) + \frac{\partial i}{\partial y} \mu, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 i}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 i}{\partial \tau^2} - 2\sqrt{LC}\mu \frac{\partial^2 i}{\partial \tau \partial y} + \mu^2 \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в уравнение (9) и группируя члены получаем

$$-2\sqrt{LC}\mu \frac{\partial^2 i}{\partial \tau \partial y} + \mu^2 \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} - \mu r_0 C \frac{\partial i}{\partial \tau} = 0. \quad (12)$$

В уравнении (12) членом $\mu^2 \partial^2 i / \partial y^2$ пренебрегаем с учетом малости, поэтому выражение (12) принимает вид

$$2\sqrt{LC}\mu \frac{\partial^2 i}{\partial \tau \partial y} + \mu r_0 C \frac{\partial i}{\partial \tau} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(2\sqrt{LC} \frac{\partial i}{\partial y} + r_0 C i \right) = 0. \quad (13)$$

Поскольку производная выражения (13) равна нулю, то можем полагать

$$2\sqrt{LC} \frac{\partial i}{\partial y} + r_0 C i = 0. \quad (14)$$

Решением уравнения (14) является

$$i(y, \tau) = A e^{-\frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} y}$$

Принимаем, что $i(x, t)|_{x=0} = \Phi(t)$, поэтому

$$i(y, \tau)|_{y=0} = \Phi(\tau). \quad (15)$$

Используя условие (15), получаем

$$A = \Phi(\tau)$$

и

$$i(y, \tau) = \Phi(\tau) \cdot e^{-\frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} y}. \quad (16)$$

Возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$i(x, t) = \Phi(t - x\sqrt{LC}) e^{-\frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \mu x}. \quad (17)$$

Для определения напряжения цепи введем обозначения

$$\tau = t - x\sqrt{LC},$$

$$\alpha = -\frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \mu,$$

с учетом которых

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\alpha \Phi(\tau) e^{-\alpha x} - e^{-\alpha x} \sqrt{LC} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = e^{-\alpha x} \sqrt{LC} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau}. \quad (19)$$

На основании второго уравнения системы (5) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{C} \left[\alpha \Phi(\tau) e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \sqrt{LC} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} \right].$$

Из последнего выражения получаем

$$u = \frac{1}{C} \int \left(\alpha \Phi(\tau) e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \sqrt{LC} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} \right) dt$$

или с учетом (19)

$$u = \sqrt{\frac{L}{C}} \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right) e^{-\alpha x} + \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{C} \int \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right) dt. \quad (20)$$

Как следует из выражения (17) и (20), в реальной линии при наличии потерь волны напряжения и тока будут постепенно затухать в направлении распространения.

Список литературы

1. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. - М.: Энергия, 1969. - 424 с.
2. Мигулин В.В., Медведев В.И. и др. Основы теории колебаний. - М.: Наука, 1978. - 392 с.