

УДК 517.98+517.5

Е. И. Радзиевская (Национальный университет пищевых технологий,
Киев)

ОБ ОЦЕНКАХ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ЕГО ЯДРА

We consider the estimates for singular numbers of a Hilbert–Schmidt integral operator in terms of the moduli of continuity of its kernel.

Работа посвящена оценкам сингулярных чисел интегрального оператора через модуль непрерывности его ядра.

Рассмотрим в $L_2[0; 1]$ интегральный оператор

$$(Af)(t) := \int_0^1 a(t, s)f(s) ds, \quad f \in L_2[0; 1], \quad (1)$$

с ядром Гильберта–Шмидта, т.е. $a(t, s)$ измерима на $[0; 1] \times [0; 1]$ функция с суммируемым квадратом,

$$\int_0^1 \int_0^1 |a(t, s)|^2 dt ds < \infty.$$

Через $\lambda_k(A)$, как обычно, обозначают собственные значения оператора A , занумерованные в порядке невозрастания их модулей; $s_k(A) = \sqrt{\lambda_k(AA^*)}$ — сингулярные числа (s -числа) оператора A , где A^* — оператор сопряженный к A .

В работе [??] было установлено, что если область значений оператора A лежит в пространстве непрерывных функций, то для сингулярных чисел (s -чисел) оператора A справедлива оценка

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \leq 25\omega_m^2\left(\frac{2}{r}, a\right), \quad r = m + 1, m + 2, \dots, \quad (2)$$

где $\omega_m(\delta, a)$ модуль непрерывности порядка m ($m = 2, 3, \dots$) ядра $a(t, s)$, определяемый следующим образом

$$\omega_m(\delta, a) := \sup_{f \in L_2, \|f\|_2=1} \sup_{0 \leq h \leq \delta} \sup_{0 \leq t \leq 1-hm} |\Delta_h^m(Af)(t)|. \quad (3)$$

Здесь $\Delta_h^m(Af)(t)$ — m -я разность значения оператора A на функции f с шагом h а $0 \leq \delta \leq m^{-1}$, если $\delta > m^{-1}$ считаем, что $\omega_m(\delta, a) = \omega_m(m^{-1}, a)$.

В данной работе покажем, что если рассматривать второй модуль непрерывности, то в неравенстве (??) постоянные, находящиеся перед модулем непрерывности, можно значительно уменьшить, а именно, справедливо утверждение

Теорема 1. *Для s -чисел оператора A вида (??), область значений которого лежит в пространстве непрерывных функций, имеет место оценка*

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \leq \omega_2^2\left(\frac{1}{2(r-1)}, a\right), \quad r = 3, 4, \dots \quad (4)$$

Для доказательства теоремы потребуется следующий факт

Лемма 1. *Пусть функции $a(s)$ и $f(s)$ принадлежат $L_2[0; 1]$. Тогда*

$$\sup_{f \in L_2, \|f\|_2=1} \int_0^1 a(s)f(s) ds = \|a\|_2, \quad (5)$$

где $\|a\|_2$ норма в $L_2[0; 1]$.

Утверждение леммы сразу следует из определения нормы линейного функционала в L^p .

Доказательство теоремы. Условие непрерывности функции $(Af)(t)$ для каждой f из $L_2[0; 1]$, означает, что функция $a(t, s)$, рассматриваемая как вектор-функция от $t \in [0; 1]$ со значениями (по s) в пространстве $L_2[0; 1]$, является непрерывной в слабом смысле. Поэтому при каждом $t_0 \in [0; 1]$ определена функция $a(t_0, s)$, которая принадлежит L_2 . Тем самым для каждого натурального n определено ядро

$$a_n(t, s) := a\left(\frac{l}{n}, s\right)(l+1-nt) + a\left(\frac{l+1}{n}, s\right)(nt-l), \quad (6)$$

$$\frac{l}{n} \leq t < \frac{l+1}{n}, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Рассмотрим функцию

$$g(t) = \int_0^1 (a(t, s)f(s) - a_n(t, s)f(s)) ds$$

Из определения $a_n(t, s)$ имеем $g(\frac{l}{n}) = g(\frac{l+1}{n}) = 0$. Отсюда и из неравенства Баркилла [??, ст. 38] заключаем, что для любой $f \in L_2$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 a(t, s)f(s) ds - \int_0^1 a_n(t, s)f(s) ds \right| \leq \omega_{l,2} \left(\frac{1}{2n}, \int_0^1 a_n(t, s)f(s) ds \right)$$

для $\frac{l}{n} \leq t < \frac{l+1}{n}$ с модулем непрерывности

$$\omega_{l,2}(\delta, b) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \sup_{\frac{l}{n} \leq t \leq \frac{l+h}{n} - 2h} |\Delta_h^2 b(t)|,$$

$0 \leq \delta \leq (2n)^{-1}$. Здесь b — произвольная непрерывная на отрезке $[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}]$ числовая функция. Из этого неравенства, учитывая определение модуля непрерывности $\omega_2(\delta, a)$, а также утверждение леммы, имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 |a(t, s) - a_n(t, s)|^2 dt ds \leq \omega_2^2 \left(\frac{1}{2n}, a \right). \quad (7)$$

Обозначим через A_n интегральный оператор с ядром $a_n(t, s)$ заданным равенствами (??). Область значений оператора A_n^* лежит в линейной оболочке $\overline{a(\frac{l}{n} + \frac{j}{n}, t)}$, $l = 0, \dots, n-1$, а $j = 0, 1$, поэтому размерность оператора A_n не превышает $n+1$, а значит, (см., например, [??, ст. 49]), $s_{k+n+1}(A) \leq s_k(A - A_n)$.

Учитывая эту оценку и замечая, что левая часть неравенства (??) определяет квадрат нормы Гильберта–Шмидта оператора $A - A_n$,

получаем

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} s_k^2(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(A - A_n) \leq \omega_2^2\left(\frac{1}{2n}, a\right).$$

и

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_r^2(A) \leq \omega_2^2\left(\frac{1}{2(r-2)}, a\right).$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Для сингулярных чисел оператора A вида (??), область значений которого лежит в пространстве непрерывных функций, справедлива оценка

$$s_r(A) \leq \left(\frac{2}{r-2}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_2\left(\frac{1}{r-1}, a\right), \quad r = 3, 4, \dots$$

Доказательство. Для произвольного натурального числа $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$s_r^2(A) \leq \frac{1}{r - [\frac{r}{2}]} \sum_{k=[\frac{r}{2}]+1}^r s_k^2(A).$$

Отсюда и из неравенства (??) получаем оценки

$$s_r^2(A) \leq \frac{1}{r - [\frac{r}{2}]} \sum_{k=[\frac{r}{2}]+1}^{\infty} s_k^2(A) \leq \frac{1}{r - [\frac{r}{2}]} \omega_2^2\left(\frac{1}{2([\frac{r}{2}] - 1)}, a\right)$$

и

$$s_r^2(A) \leq \frac{2}{r-2} \omega_2^2\left(\frac{1}{r-1}, a\right),$$

доказывающие следствие 1.

Замечание. Утверждения теоремы 1 и следствия 1, в общем случае, несправедливы для $r = 1, 2$. Действительно, пусть ядро оператора $b(t, s) = 1 + ts$. Для него $\omega_2(\delta, b) \equiv 0$, а соответствующий этому ядру интегральный оператор является самосопряженным в L_2 и имеет размерность, равную 2. Поэтому его сингулярные числа $s_1(A)$ и $s_2(A)$ отличны от нуля, а все остальные равны 0.

1. Радзиевская Е. И. Об оценках сингулярных чисел интегрального оператора Гильберта–Шмидта // Український математичний вісник. — 2012. — 9, № 1. — С. 114–124.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
3. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. — Киев: Наукова думка, 1992.