УДК 519.8

ІСТОРИЧНИЙ РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГОР. ОСНОВНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Чубенко А. М., Голубенко О. В.

Анотація. *В роботі проведено теоретичне дослідження, в якому показано наукову новизну та практичну цінність такого розділу дослідження операцій як диференціальні ігри. В хронологічному порядку визначено основні наукові здобутки та роботи вчених в галузі теорії диференціальних ігор. Розглянуто основну постановку задачі переслідування. В залежності від виду гри класифіковано типи плати.*

Ключові слова: *диференціальна гра, стратегія, плата.*

Вступ. Будь-яка діяльність людини завжди була спрямована на певний результат. Але людина – частина суспільства, тому часто її прагнення наштовхуються на протидію з боку певних факторів: іншої людини чи групи людей, природи тощо. Така конфліктність ситуацій притаманна багатьом процесам з життя людини. Прийняття рішень може ускладнитись ще й тим, що не завжди людина знає наміри супротивника. Оптимальність вибору поведінки (найкращий результат діяльності для обох сторін) являється критерієм розв'язання конфлікту.

Найбільш значущими на сьогодення являються дослідження інформаційних процесів у взаємодії складних систем, основною характеристикою яких є конфліктний характер прийняття рішень. Прикладами таких систем можуть бути: в економіці – підприємства, галузі; в екології – складові біоценозу; в соціології – групи людей, колективи; у військовій справі - армії. Особливістю функціонування таких систем є наявність неконтрольованих факторів. В теорії ігор розробляються методи розв'язання конфліктів в умовах невизначеності, мета яких – оптимальність результату для обох сторін.

Методи досліджень. Застосовано методи математичного моделювання.

Теорія ігор тісно пов'язана з теорією оптимального синтезу, управлінням випадковими процесами, теорією дискретних ігор, теорією диференціальних рівнянь, варіаційним численням, класичним математичним аналізом тощо.

Оптимальні рішення в математичному моделюванні пропонувались ще у XVIII ст.. Задачі виробництва і ціноутворення в умовах олігополії розглядались в XIX ст. А. Курно і Ж.Бертраном. На початку XX ст. Е.Ласкер, Е.Цермело, Э.Борель пропонують ідею математичної теорії конфлікту інтересів. Теорія диференціальних ігор викристалізувалась як розділ дослідження операцій вже у XX сторіччі.

Однією з перших робіт в області диференціальних ігор варто вважати роботу Гуго Штейнгауза (1887 — 1972) , польського вченого, одного з основоположників Львівської математичної школи, опублікованої в 1925 р.. В своїй роботі він вперше формулює задачу переслідування як диференціальну гру.

Математична теорія ігор бере початок з неокласичної економіки. Вперше математичні аспекти і застосування теорії були розглянуті в класичній книзі 1944 року Джона фон Неймана і Оскара Моргенштерна "Теорія ігор і економічна поведінка". Цій роботі передувало самостійне дослідження в даній галузі Джона фон Неймана, яке вилилось в легендарну працю "До теорії стратегічних ігор", опубліковану 1928 р. Вона містила доведення теореми про мінімакс, яка стала наріжним каменем для подальших досліджень в теорії ігор. Доведена фон Нейманом теорема стверджує, що для довільної скінченної гри двох гравців з нульовою сумою існує стійка пара стратегій, для яких мінімальний програш одного гравця співпадає з максимальним виграшем іншого. Стійкість стратегій означає, що кожен з гравців, не слідуючи оптимальній стратегії, лише погіршує свої шанси на найкращий для себе результат.

Дж. Неш в 1949 р. написав дисертацію по теорії ігор. Його роботи присвячені антагоністичним іграм, розв'язання яких зводиться до відшукання стійкого рівноважного стану (рівноваги по Нешу). В своїх працях Дж. Неш показав, що класичний підхід А.Сміта, коли кожен сам за себе, не оптимальний. Оптимальнішими є стратегії, коли гравець намагається зробити краще для себе, роблячи краще для конкурента. Дж. Неш, завдяки своїм дослідженням в області теорії ігор, став одним з ведучих спеціалістів в галузі ведення "холодної війни" що підтверджує масштабність задач, окреслених теорією ігор.

В 1951 Джордж Браун описав простий ітераційний метод наближеного розв'язання дискретних ігор з нульовою сумою в своїй статті.

В 1952 вийшов перший посібник по теорії ігор Дж. Маккінсі "Введення в теорію ігор"

Хоча теорія ігор спочатку і розглядала економічні моделі до 1950-х, вона залишалась формальною теорією в рамках математики. Але вже з 1950-х рр.. починаються спроби застосувати методи теорії ігор не лише в економіці, але і в біології, кібернетиці, техніці, антропології. Після Другої світової війни результатами теорії зацікавились військові, які розгледіли в ній потужний апарат для дослідження стратегічних рішень. Математики знову почали дослідження в галузі після тривалої перерви. Розроблений ними метод побудований на диференціальному рівнянні першого порядку в частинних похідних для функції значення гри, яке вперше було представлено Руфусом Айзексом. Руфус Філіп Айзекс (1914 — 1981) — американський математик. Працював в області теорії функцій, теорії графів, аеродинаміки та оптимізації. Всесвітнє визнання отримав в області диференціальних ігор. Отримав степінь бакалавра в Массачусецькому технологічному університеті в 1936 р., вищі степені – в Колумбійському університеті в 1942 р.. Після Другої світової війни до 1947 р. працював в Університеті Нотр-Дам. З 1948 р. до 1955 р. співпрацював в RAND Corporation з такими вченими, як Р. Беллман, Д. Блеквелл, Л. Берковиц, С. Карлін, Дж. Неш, У. Флемінг, Л. Шеплі. Більшість його трудів того часу засекречені та залишились невідомими. В подальшому працював на підприємствах оборонної та авіаційної промисловості. В 1965 р. Р. Айзекс опублікував фундаментальну роботу по теорії диференціальних ігор, яка і донині користується величезною популярністю у тих, хто приступає до вивчення теорії диференціальних ігор. В роботі досліджувались антагоністичні ігри переслідування. Р. Айзекс вперше розглянув та розв'язав гру "шофер - вбиця", яка є моделлю переслідування торпедою військового катера.

В 1972 р. Оскаром Моргенштерном був заснований Міжнародний журнал з теорії ігор.

Великим вкладом в застосування теорії ігор стала робота Томаса Шеллінга, нобелівського лауреата з економіки 2005 р. "Стратегія конфлікту". Т. Шеллінг розглядає різні стратегії поведінки учасників конфлікту, які співпадають з тактиками управління конфліктами і принципами аналізу конфліктів в конфліктології (психологічна дисципліна) та управлінні конфліктами в менеджменті.

Перші роботи по диференціальним іграм на теренах колишнього СРСР з'явились в середині 60-х років. Відповідно до цілі гри і розв'язку можна виділити такі основні школи в підходах до задачі переслідування.

Л.С. Понтрягін і його школа розглядають задачу переслідування, розв'язуючи її за переслідувача P, і задачу втечі – за втікача E.

Леон Аганесович Петросян (народ. 1940 р.) - доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету прикладної математики Санкт-Петербурзького Державного університету з 1975 р. Основні наукові результати стосуються дослідження та розв'язання диференціальних ігор. В іграх переслідування повністю досліджений так званий регулярний випадок існування програмної оптимальної стратегії у гравця-втікача і отримано розв'язки цілого класу ігор простого переслідування. В іграх переслідування з неповною інформацією вперше обґрунтовано необхідність використання змішаних стратегій, які включають можливість вибору випадкового впливу. На даній основі отримано розв'язок ігор переслідування із затримкою інформації. Вперше було досліджено неантагоністичні диференціальні ігри, в яких спостерігалось порушення принципів динамічної стійкості. Петросяном та його учнями було запропоновано процедуру регуляризації принципів оптимальності, яка приводила до динамічно-стійких розв'язків. Порушення динамічної стійкості означає, що вибрана на початку процесу прийняття рішень оптимальна траєкторія на певному етапі перестає бути такою.

Микола Миколайович Красовський і його школа оцінюють якість переслідування по часу, що пройшов з моменту початку процесу переслідування до моменту зустрічі. М. М. Красовський запропонував оригінальну концепцію позиційних диференціальних ігор, в основу якої полягло правило так званого "екстремального прицілювання", яке в ряді задач дає ситуацію рівноваги. Розроблена ним формалізація диференціальної гри склала основу для розвитку теорії (існування сідлових точок в класах чистих та змішаних стратегій, стабілізація розв'язків) і для побудови ефективних обчислювальних алгоритмів.

В останні роки почали активно вивчатись диференціальні ігри при невизначеності. При цьому найдетальніше досліджений їх лінійно-квадратичний варіант. Було розроблено ряд підходів щодо формалізації розв'язків. Наприклад, 1) максимінний; 2) умова рівноваги по Нешу; 3) умова рівноваги загроз та контрзагроз; 4) активна рівновага.

Розглянемо постановку диференціальної гри переслідування, яка була розглянута Л.А. Петросяном. Будемо вважати, що гравець P – переслідувач, а гравець E – втікач. Нехай $x \in R^n, y \in R^n, u \in U \subset R^k, v \in V \subset R^l, f(x,u), g(y,v)$ - вектор-функції розмірності n, задані в просторах $R^n \times U, R^n \times V$ відповідно.

Розглянемо дві системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) & (1); \\ \dot{y} = g(y,v) & (2) \end{cases}$$

з початковими умовами x_0, y_0. Гравець P (E) починає рух з фазового стану $x_0(y_0)$ і переміщується в фазовому просторі R^n згідно рівнянь (1)((2)), вибираючи в певний момент часу значення параметру $u \in U (v \in V)$ відповідно до своїх цілей та інформації, яка доступна в цей час.

Найпростіше описується випадок повної інформації. Це означає, що гравцям в кожен момент часу при виборі параметрів $u \in U, v \in V$ відомо цей час і фазовий стан власний та супротивника. Якщо лише гравцю Р це відомо, то гра називається диференціальною грою з дискримінацією гравця Е. Параметри $u \in U, v \in V$ називаються управліннями гравців Р та Е відповідно. Функції $x(t), y(t)$, які задовольняють системам (1) та (2), називаються траєкторіями руху гравців Р та Е.

Розглянемо три типи функцій виграшу.

1) Термінальний виграш. Задані певне число $T > 0$ і неперервна по (x, y) функція $H(x, y)$. Виграш в кожній ситуації $S = \{x_0, y_0; u, v\}$ визначається наступним чином: $K(x_0, y_0; u, v) = H(x(T), y(T))$. Якщо розглядати задачу переслідування, то $H(x(T), y(T)) = \rho(x(T), y(T))$, де $\rho(x(T), y(T)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i(T) - y_i(T))^2}$ - евклідова відстань між точками $x(T), y(T)$. Ціллю гравця Е являється відхилення від гравця Р до моменту закінчення гри на максимальну відстань. Якщо гра антагоністична, то це значить, що ціль гравця Р – максимальне зближення з гравцем Е до моменту Т. При такому визначенні виграш залежить від кінцевих станів обох гравців і кожному з них не зараховуються попередні результати. Тому виграш гравця Е визначається як мінімальна відстань між гравцями в процесі гри: $\min\limits_{0 \le t \le T} \rho(x(t), y(t))$.

2) Інтегральний виграш. В $R^n \times R^n$ задано многовид F^m і неперервна функція $H(x, y)$. Нехай в ситуації $S = \{x_0, y_0; u, v\}$ t_n - перший момент попадання траєкторії $(x(t), y(t))$ на F^m. Тоді $K(S) = \int_0^{t_n} H(x(t), y(t))dt$ - виграш. При $t_n \to \infty$ $K \to \infty$. У випадку $H \equiv 1$ $K \equiv t_n$ має місце задача на швидкодію.

3) Якісний виграш. Функція виграшу *K* може приймати одне з двох значень: 1 або 0 (так чи ні) при досягненні мети або ні.

Результати та обговорення. В даній роботі приділяється багато уваги історичній довідці з розвитку теорії ігор, в тому числі диференціальних ігор, як перспективного та досить нового розділу математики. Провівши аналіз літературних джерел по даній тематиці, виявилось, що основною задачею теорії диференціальних ігор є задача переслідування. Задається вона системою двох диференціальних рівнянь, які залежать не лише від початкових умов, але і від певним чином заданих параметрів управління. Одним з ключових параметрів гри є плата (виграш). В залежності від мотивів гри розрізняють три типи виграшу.

Висновки.

1. Проведено дослідження робіт та досягнень вчених, які займались проблематикою теорії ігор.

2. Було проаналізовано основну постановку задачі переслідування.

Література.

1. *Айзекс, Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 479 с.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. — 456 с.
3. *Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В.* Выпуклый анализ и дифференциальные игры. — Алматы: Гылым, 2005. — 392 с.
4. Петросян Л.А., Зенквич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М.:Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с.

Авторська довідка:

*1.**Чубенко Анастасія Михайлівна**, асистент; кафедра вищої математики, Національний університет харчових технологій, e-mail: nastasya_1701@mail.ru*

*2. **Голубенко Олена Володимирівна**, студентка 1 курсу факультету бродильних і цукрових виробництв.*