

О равномерной сходимости рядов Фурье к (ψ, β) -производным

ЕЛЕНА И. РАДЗИЕВСКАЯ

(Представлена М. М. Маламудом)

Аннотация. В терминах наилучших приближений функции в пространстве L_p найдено условие существования у нее (ψ, β) -производных и равномерной сходимости к ним рядов Фурье.

2010 MSC. 42A10, 42A27.

Ключевые слова и фразы. (ψ, β) -производные, равномерная сходимость рядов Фурье, наилучшие приближения функции, пространства L_p .

1. Введение

Пусть L_p – пространство измеримых 2π -периодических функций $f(x)$, для которых $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty$, $1 < p < \infty$ и

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$$

ее ряд Фурье.

Пусть, далее $\psi(t) > 0$ при $t > 1$ и β – произвольное фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_k}{\psi(|k|)} e^{i(kx + \beta \operatorname{sign} k)}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то ее называют (ψ, β) -производной функции f и обозначают f_{β}^{ψ} . Множество функций, которые удовлетворяют этим условиям обозначают L_{β}^{ψ} .

Статья поступила в редакцию 13.03.2018

Если $f \in L_\beta^\psi$, а $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N} \subset L(0, 2\pi)$), то говорят, что функция принадлежит классу $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ [1, с. 142 – 143].

Введенные таким образом классы при фиксированных значениях, определяющих их параметров, совпадают с известными классами функций W^r ; $W_{\beta,p}^r$; $W_\beta^r H_\omega$ и им подобными.

Данная работа посвящена нахождению достаточного условия существования непрерывной (ψ, β) -производной у функции f из L_p и равномерной сходимости ряда Фурье (ψ, β) -производной.

В пункте 2 будут приведены определения и теоремы, необходимые для формулировки и доказательства основного результата этой работы, а сама теорема и ее доказательство будут приведены в пункте 3.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\omega_k(f, \delta)_p$ – модуль гладкости k -го порядка (k – натуральное число) в пространстве $L_p(0, 2\pi)$

$$\omega_k(f, \delta)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \left(\int_0^{2\pi} |\Delta_h^k f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\Delta_h^k f(x)$ – конечная разность k -го порядка функции $f(x)$ с шагом h

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih).$$

Если $k = 1$, то вместо $\omega_1(f, \delta)_p$ будем писать $\omega(f, \delta)_p$.

Далее через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение в метрике пространства L_p функции $f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка не выше $n - 1$.

Справедлива следующая (см. [2])

Теорема 2.1. Пусть $\psi(t)$ – такая положительная невозрастающая функция, определенная для всех $t \geq 1$ такая, что $\psi(2t) \geq c\psi(t)$ при $t \geq 1$ (c – некоторая положительная константа) и наилучшие приближения функции $f \in L_p$, $1 < p < \infty$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k} < \infty. \quad (2.1)$$

Тогда для любого действительного β у функции $f \in L_p$ существует

(ψ, β) -производная, принадлежащая L_p , для которой

$$E_n(f_\beta^\psi)_p \leq c_1 \left(\frac{E_n(f)_p}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k} \right). \quad (2.2)$$

Здесь, и далее $c, c_i, i = 1, 2, \dots$ некоторые постоянные, вообще зависящие от функции $\psi(\cdot)$. В случае, когда они будут зависеть не только от ψ , определяющие их параметры будут указаны далее в скобках.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для любого действительного β у функции $f \in L_p$ существует (ψ, β) -производная, принадлежащая L_p , для которой

$$\omega_k(f_\beta^\psi, \frac{1}{n})_p \leq c(k) \left(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)\nu} \right), \quad (2.3)$$

где k любое натуральное число.

Доказательство. Известно (см.[3, с. 344]), что если $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty$ и k -натуральное число, то

$$\omega_k(f, \frac{1}{n})_p \leq c(k) \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} E_\nu(f)_p.$$

Из теоремы 2.1 следует, что существует (ψ, β) -производная функции f и она принадлежит L_p поэтому имеет место неравенство

$$\omega_k(f_\beta^\psi, \frac{1}{n})_p \leq c(k) \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} E_\nu(f_\beta^\psi)_p.$$

Далее, подставляя в это неравенство вместо $E_\nu(f_\beta^\psi)_p$ правую часть неравенства (2.2), получаем:

$$\begin{aligned} \omega_k(f, \frac{1}{n})_p &\leq c_1 \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \left(\nu^{k-1} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)} + \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \right) \\ &\leq c_2 \left(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)} + \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} \sum_{m=\nu+1}^n \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_3 \left(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)} + \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)\nu} \sum_{m=1}^{\nu} m^{k-1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \right) \\
&\leq c_3 \left(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)\nu} \right).
\end{aligned}$$

Следствие доказано. $\square$

При доказательстве основного результата работы будет использоваться неравенство Коношкова–Стечкина. А именно, понадобится следующая (см.[4])

Теорема 2.2. Пусть функция $f \in L_p(0, 2\pi)$, $1 \leq p < \infty$ такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_p k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} < \infty, \quad (2.4)$$

где q – некоторое число, $p < q \leq \infty$. Тогда $f \in L_q(0, 2\pi)$, причем

$$E_n(f)_q \leq c_3 \left(E_n(f)_p (n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_p k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} \right) \quad (2.5)$$

$n = 0, 1, \dots$

3. Основной результат

Основным результатом работы является следующее утверждение

Теорема 3.1. Пусть $\psi(t)$ – такая положительная невозрастающая функция, определенная для всех $t \geq 1$ что $\psi(2t) \geq c\psi(t)$ при $t \geq 1$ (c – некоторая положительная константа) и наилучшие приближения функции $f \in L_p$, $1 < p < \infty$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{1}{p}} E_k(f)_p}{\psi(k)k} < \infty. \quad (3.1)$$

Тогда для любого действительного β у функции $f \in L_p$ существует непрерывная (ψ, β) -производная, ряд Фурье которой сходится к ней равномерно.

Доказательство. Согласно условию (3.1) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k}$$

сходится, что в силу теоремы 2.1 гарантирует существование у функции $f(\psi, \beta)$ -производной, принадлежащей пространству L_p , для которой справедливо неравенство (2.2) и (2.3). Подставляя теперь оценку (2.2) в неравенство Конюшкова–Стечкина (2.5) (записанного здесь для функции f_β^ψ и показателя $q = \infty$)

$$E_n(f_\beta^\psi)_\infty \leq c_3 \left(E_n(f_\beta^\psi)_p (n+1)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f_\beta^\psi)_p k^{\frac{1}{p}-1} \right),$$

имеем:

$$\begin{aligned} E_n(f_\beta^\psi)_\infty &\leq c_4 \left(\frac{E_n(f)_p (n+1)^{\frac{1}{p}}}{\psi(n)} + (n+1)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k} \right) \\ &+ c_4 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^{\frac{1}{p}} E_k(f)_p}{\psi(k)k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для доказательства непрерывности функции f_β^ψ достаточно (и необходимо) установить соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f_\beta^\psi)_\infty = 0. \quad (3.3)$$

Для этого оценим слагаемые из правой части неравенства (3.2).

Вначале установим соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(f)_p (n)^{\frac{1}{p}}}{\psi(n)} = 0. \quad (3.4)$$

Пусть

$$\alpha_n \equiv \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \frac{k^{\frac{1}{p}} E_k(f)_p}{\psi(k)k} \geq \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^n \frac{k^{\frac{1}{p}} E_k(f)_p}{\psi(k)k}. \quad (3.5)$$

Учитывая невозрастаемость по k последовательности $E_k(f)_p$ получаем, что

$$\alpha_n \geq \left(\frac{E_n(f)_p}{\psi(n)} \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^n \frac{k^{\frac{1}{p}} \psi(n)}{k \psi(k)} \right). \quad (3.6)$$

Но, значения k в сумме, стоящей в правой части неравенства (3.5), больше, чем $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$, а значит $k > \frac{n}{2}$, откуда и из свойств функции $\psi(t)$, следует соотношения: $\psi(n) \geq c\psi\left(\frac{n}{2}\right) \geq \psi(k)$, т.е. $\frac{\psi(n)}{\psi(k)} \geq c$ при $k \geq \frac{n}{2}$. Подставляя это неравенство в (3.5) и учитывая, что последовательность $k^{\frac{1}{p}-1}$ убывает, а $n - \left[\frac{n}{2}\right] \geq \frac{n}{2}$, имеем

$$\alpha_n \geq \frac{E_n(f)_p}{\psi(n)} \left(n - \left[\frac{n}{2}\right] \right) n^{\frac{1}{p}-1} \geq \frac{c}{2} \frac{E_n(f)_p}{\psi(n)} n^{\frac{1}{p}}. \quad (3.7)$$

По определению (3.5) число α_n является остатком сходящегося ряда (3.1) и поэтому $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда и из оценки (3.6) вытекает равенство (3.4).

Положим теперь

$$\sigma_n \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m}. \quad (3.8)$$

Покажем, что конечны σ_n и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0. \quad (3.9)$$

Переставляя суммирование по k и n в двойной сумме (3.8) и используя неравенство

$$\sum_{k=n+1}^m k^{\frac{1}{p}-1} \leq \int_n^m x^{\frac{1}{p}-1} dx \leq pm^{\frac{1}{p}},$$

получаем соотношение

$$\sigma_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \sum_{k=n+1}^m k^{\frac{1}{p}-1} \leq p \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{p}} E_m(f)_p}{\psi(m)m},$$

из которых и из сходимости ряда (3.1) следует равенство (3.9). (Законность перестановки слагаемых в суммах вытекает из положительности слагаемых и известной теоремы анализа).

Заметим, что сходимость ряда, стоящего в правой части тождества (3.9), эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left((k+1)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \right),$$

члены которого, заключенного в больших круглых скобках, монотонно убывают. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left((k+1)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Итак, согласно равенствам (3.4), (3.8)–(3.10), первое, второе и четвертое слагаемые из правой части неравенства (3.2) стремятся к нулю, когда n стремится к бесконечности. Стремление же к нулю третьего слагаемого вытекает из сходимости ряда (3.1). Тем самым установлено соотношение (3.3), т.е. доказана непрерывность (ψ, β) -производной функции f .

Для завершения доказательства теоремы осталось показать равномерную сходимость к непрерывной функции f_β^ψ ее ряда Фурье. Для этого установим соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} \omega \left(f_\beta^\psi, \frac{1}{n} \right)_p = 0. \quad (3.11)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое m , что

$$\sum_{k=m}^{\infty} k^{\frac{1}{p}} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k} < \varepsilon.$$

Тогда для всех $n > m$

$$\begin{aligned} & \frac{n^{\frac{1}{p}}}{n} \sum_{k=1}^n \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)} \\ &= \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^m \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)} + \sum_{k=m}^n \left(\frac{k}{n} \right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{k^{\frac{1}{p}} E_k(f)_p}{\psi(k)k} \leq \frac{c_m}{n^{1-\frac{1}{p}}} + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, в силу произвольности ε , выводим соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{n} \sum_{k=1}^n \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)} = 0,$$

из которого и из неравенства (2.3) и равенства (3.10) получаем (3.11). Из (3.11) и известных свойств модуля непрерывности заключаем, что

$$\omega(f_\beta^\psi, \delta)_p = o(\delta^{\frac{1}{p}}).$$

Это условие согласно теореме Яно [5] гарантирует равномерную сходимость ряда Фурье функции f_β^ψ . Тем самым теорема полностью доказана. $\square$

Литература

- [1] А. И. Степанец, *Методы теории приближений Ч. I.*, Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2002.
- [2] А. И. Степанец, Е. И. Жукина, *Обратные теоремы приближения ψ, β -дифференцируемых функций* // Укр. мат. журн., **41** (1989), No. 86, 1106–1112.
- [3] А. Ф. Тиман, *Теория приближений функций действительного переменного*, М., Физматгиз, 1960.
- [4] А. А. Конюшков, *Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье* // Мат. сб., **44** (1958), No. 86, 53–84.
- [5] К. Yano, *On Hardy and Littlewood's Theorem* // Proc. Japan Acad., **33** (1957), No. 2, 73–74.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Елена Ивановна
Радзиевская**

Национальный университет
пищевых технологий,
Киев, Украина
E-Mail: radzlenna58@gmail.com