УДК 517.98
М.Ф.Городній, В.М.Романенко (Нац.ун-т ім.Т.Шевченка, Київ)

АПРОКСИМАЦІЯ ОБМЕЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З НЕОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ РОЗВ'ЯЗКАМИ ВІДПОВІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ *

We investigate a problem of approximation of a bounded solution of difference analog for differential equation

$$x^{(m)}(t)+A_1x^{(m-1)}(t)+...+A_{m-1}x'(t)=Ax(t)+f(t),\quad t\in R,$$

by solutions of the corresponding boundary value problems. Here, A is an unbounded operator in the Banach space $B,\ \{A_1,\ ....\ ,A_{m-1}\}\subset L(B),$ and $f:R\to B$ is a fixed function.

Досліджено питання про апроксимацію обмеженого розв’язку різницевого аналога диференціального рівняння

$$x^{(m)}(t)+A_1x^{(m-1)}(t)+...+A_{m-1}x'(t)=Ax(t)+f(t),\quad t\in R,$$

розв'язками відповідних крайових задач. Тут A — необмежений оператор в банаховому просторі $B,\ \{A_1,\ ....\ ,A_{m-1}\}\subset L(B),\ f:R\to B$ – фіксована функція.

Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\vec{0}$; $L(B)$ — банахів простір лінійних обмежених операторів, що діють із B в B ; $\{A_k:1\le k\le m-1\}$ — набір операторів з $L(B)$; A — замкнений оператор, що діє в B, з областю визначення D та резольвентною множиною $\rho(A)$; I — одиничний, 0 — нульовий оператори в B. Різницевим аналогом диференціального рівняння

$$x^{(m)}(t)+A_1x^{(m-1)}(t)+...+A_{m-1}x'(t)=Ax(t)+f(t),\quad t\in R,$$

є рівняння

$$\Delta^{(m)}x_n+A_1\Delta^{m-1}x_n+....+A_{(m-1)}\Delta^1x_n=Ax_n+y_n,\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Тут $f:R\to B$ — фіксована функція, $\{y_n:n\in\mathbb{Z}\}$ — послідовність елементів B,

$$\Delta^1x_n:=x_{n+1}-x_{n-1},$$

$$\Delta^{(k+1)}x_n:=\Delta^{(k)}x_{n+1}-\Delta^{(k)}x_{n-1},\qquad k\ge 1.$$

Відомо [1], що різницеве рівняння (1) має для довільної обмеженої за нормою в B послідовності $\{y_n:n\in\mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n:n\in\mathbb{Z}\}$, що задовольняє умову

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_n\|+\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|Ax_n\|<\ +\infty, \tag{2}$$

тоді і тільки тоді, коли виконується таке припущення.

Припущення 1. *Для довільного ,* $z,\ |\ z\ |=1$, *обернений оператор до оператора*

* Частково підтримана Міжнародною соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), APU071022

©М.Ф.ГОРОДНІЙ, В.М.РОМАНЕНКО, 2000

$$\Phi(z):\left(z-z^{-1}\right)^m 1+A_1\left(z-z^{-1}\right)^{m-1}+\ldots+A_{m-1}\left(z-z^{-1}\right)-A$$

Існує та належить $L(B)$.

Мета цієї роботи — вивчити питання про можливість наближення обмеженого розв'язку рівняння (1) розв'язками відповідних крайових різницевих задач.

Допоміжні твердження. Внаслідок теореми 1 із [1] при виконанні включення $[-2;2]\subset\rho(A)$ різницеве рівняння

$$x_{n+1}+x_{n-1}=Ax_n+y_n,\qquad n\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

має для довільної обмеженої послідовності $\{y_n : n\in\mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n : n\in\mathbb{Z}\}$, що задовольняє умову (2), причому існує залежна тільки від оператора A $C>0$ така, що для довільної обмеженої послідовності $\{y_n : n\in\mathbb{Z}\}$ та відповідного їй розв'язку $\{x_n : n\in\mathbb{Z}\}$ рівняння (3) справджується нерівність

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_n\|\le C\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|y_n\|.$$

Рівнянню (3) відповідає набір крайових різницевих задач вигляду

$$\begin{gathered} u_{n+1}+u_{n-1}=Au_n+y_n,\qquad -p+1\le n\le q-1,\\ u_{-p}=a,\qquad u_q=b. \end{gathered} \tag{4}$$

Тут $a,\ b$ — фіксовані елементи простору $B,\ p,\ q$ — натуральні числа.

Покладемо

$$\Lambda:=\left\{2\cos\frac{j\pi}{k}\,\middle|\,1\le j\le k-1,\quad k\ge 2\right\}.$$

Теорема 1. *Для того щоб для довільних* $\{p,\ q\}\subset\mathbb{N},\{a,b,y_{-p+1},\ldots,y_{q-1}\}\subset B$ *різницева крайова задача* (4) *мала єдиний розв'язок* $\{u_n : -p\le n\le q\}$, *необхідно і достатньо, щоб* $\Lambda\subset\rho(A)$.

Теорема 2. *Якщо* $[-2;2]\subset\rho(A)$, *то знайдуться такі залежні тільки від оператора* A *сталі* $L>0, R>1$, *що для довільної обмеженої в* B *послідовності* $\{y_n : n\in\mathbb{Z}\}$, *відповідного її єдиного розв'язку* $\{x_n : n\in\mathbb{Z}\}$ *різницевого рівняння (3), довільних* $\{p,\ q\}\subset\mathbb{N},\ \{a,\ b\}\subset B$ *та відповідного* $\{a,b,y_{-p+1},\ldots,y_{q-1}\}$ *єдиного розв'язку* $\{u_n : -p\le n\le q\}$ *крайової задачі* (4), *довільного* $k,\ 1\le k\le p+q-1$, *справджується нерівність*

$$\|x_{-p+k}-u_{-p+k}\|\le L\left(\frac{C_1+\|a\|}{R^k}+\frac{C_1+\|b\|}{R^{p+q-k}}\right),$$

де

$$C_1 := C \sup_{n \in Z} \|y_n\|.$$

Доведення теорем 1, 2 проводиться тим же способом, що і доведення аналогічних тверджень в [2], з урахуванням деяких фактів з операторного числення для замкненого оператора (див. [3]). Додатково треба зауважити, що, поклавши, як і в [2],

$$\varphi_1(\lambda) = 1, \qquad \varphi_2(\lambda) = \lambda,$$
$$\varphi_{k+1}(\lambda) = \lambda\varphi_k(\lambda) - \varphi_{k-1}(\lambda), \qquad k \geq 2,$$

можна стверджувати, що при $k \geq 2$ оператор $\varphi_k(A)$ має неперервний обернений оператор

$$\varphi_k^{-1}(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \varphi_k^{-1}(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda.$$

Тут $R(\lambda, A)$ — резольвента оператора A, ∂K — границя в $\mathbb{C}$ множини

$$K := \left\{ \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \left| \frac{\alpha^2}{4 + \delta^2} + \frac{\beta^2}{\delta^2} > 1 \right.\right\};$$

Число $\delta > 0,$ що використовується в означенні множини K, вибирається таким, щоб виконувалось включення $\mathbb{C} \setminus K \subset \rho(A).$ Існування оператора $\varphi_k^{-1}(A)$ випливає з того, що $\varphi_k^{-1}(A)$ — аналітична на K функція з нулем порядку $k-1$ на нескінченності. Також при фіксованих $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ оператор

$$\varphi_n(\lambda)\varphi_{n+m}^{-1}(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \varphi_n^{-1}(\lambda)\varphi_{n+m}^{-1}(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda.$$

визначений та належить $L(B)$, причому

$$\left\|\varphi_n(\lambda)\varphi_{n+m}^{-1}(\lambda)\right\| \leq \frac{1}{2\pi} l(\partial K) \sup_{\lambda \in \partial K} \|R(\lambda, A)\| \sup_{\lambda \subset K \cup \partial K} \left|\varphi_n(\lambda)\varphi_{n+m}^{-1}(\lambda)\right|,$$

де $l(\partial K)$ — довжина ∂K.

Апроксимація обмеженого розв'язку рівняння (1). Спочатку зауважимо, що різницеве рівняння (1) еквівалентне такій системі рівнянь:

$$\begin{gathered} x_{n+1} - x_{n-1} = v_{1,n}, \\ \upsilon_{1,n+1} - \upsilon_{1,n-1} = \upsilon_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \upsilon_{m-2,n+1} - \upsilon_{m-2,n-11} = \upsilon_{m-1,n}, \\ \upsilon_{m-1,n+1} - \upsilon_{m-1,n-11} = Ax_n - A_1\upsilon_{m-1,n} - \ldots - A_{m-1}\upsilon_{1,n} + y_n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{5}$$

Позначимо через B^m декартів добуток m екземплярів простору B; B^m — банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою

$$\|\vec{z}\|_m := \max_{1 \leq k \leq m} \|z_k\|, \qquad \vec{z} = (z_1, \ldots, z_m) \in B^m.$$

З урахуванням правил матричного числення система (5) записується в цьому просторі таким чином:

$$\vec{z}_{n+1} - \vec{z}_{n-1} = H\vec{z}_n + \vec{y}_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

$$\vec{z}_n \begin{pmatrix} x_n \\ \upsilon_{1,n} \\ \vdots \\ \upsilon_{m-1,n} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & I & & & \\ & \vdots & \vdots & & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & 0 & I \\ A & -A_{m-1} & \ldots & -A_2 & -A_1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

причому на незаповнених місцях матриці H знаходяться нульові оператори. Матриця H визначає в просторі B^m оператор, який теж позначатимемо буквою H. Внаслідок замкненості A цей оператор замкнений.

У подальшому використовується таке припущення.

Припущення 2. *Оператори* $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ *попарно комутують, а також*

$$\forall\ 1 \le k \le m-1:\ A_k : B \to D, \qquad AA_k = A_k A \text{ на } D.$$

Справедлива така лема.

Лема 1. *Якщо виконуються припущення* 1 / 2. *то рівняння* (6) *має для довільної обмеженої в* B^m *послідовності* $\{\vec{y}_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *єдиний обмежений розв'язок* $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Зауваження. *З* еквівалентності рівняння (1) та системи (5) випливає існування обмеженого розв'язку рівняння (6) тільки для послідовностей $\{\vec{y}_n : n \in \mathbb{Z}\}$ вигляду (7).

Доведення. Нехай E — одиничний оператор в B^m. Внаслідок теореми 1 з [1] досить довести, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1,$, оператор $\Psi(\lambda) := H - (\lambda - \lambda^{-1})E$ має в B^m неперервний обернений оператор. З урахуванням припущення 2 визначник матриці, відповідної $\Psi(\lambda)$, знайдений за правилами матричного числення, дорівнює $(-1)^m \Phi(\lambda)$. Тому при виконанні припущення 1 для цієї матриці можна побудувати обернену, яка і задає оператор $\Psi^{-1}(\lambda)$.

Лему 1 доведено.

Різницевому рівнянню (6) відповідає набір крайових різницевих задач вигляду

$$\begin{gathered} \vec{w}_{n+1} - \vec{w}_{n-1} = H\vec{w}_n + \vec{y}_n, \qquad -p+1 \le n \le q-1, \\ \vec{w}_{-p} = \vec{a}, \qquad \vec{w}_q = \vec{b}, \end{gathered} \tag{8}$$

де $\{\vec{a}, \vec{b}\} \subset B^m, \{p, q\} \subset \mathbb{N}$ — фіксовані. Оскільки рівняння (6) еквівалентне рівнянню

$$i^{n+1}\vec{z}_{n+1} + i^{n-1}\vec{z}_{n-1} = iH\left(i^n \vec{z}_n\right) + i^{n+1} y_n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

і умова

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \qquad |\lambda| = 1:\ \exists \Psi^{-1}(\lambda)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\rho(iH) \supset [-2;2]$, то внаслідок теореми 1 справедливе таке твердження.

Лема 2. *Якщо виконуються припущення* 1 *і* 2, *то для довільних* $\{p, q\} \subset \mathbb{N}$, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{y}_{-p+1}, \ldots, \vec{y}_{q+1}\} \subset B^m$ *крайова задача* (8) *має єдиний розв'язок* $\{w_n : -p \le n \le q\}$.

Наступна теорема стверджує, що перші координати розв'язків крайових задач (8) апроксимують при $p,\ q \to \infty$ обмежений розв'язок різницевого рівняння (1), а також містить оцінку швидкості апроксимації.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення* $1\,i\,2$. *Тоді знайдуться такі залежні тільки від операторів* $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ *сталі* $L > 0,\ R > 1,$*, що для довільної обмеженої послідовності* $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$, *відповідного їй єдиного розв'язку* $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *рівняння* (1), *довільних* $\{p, q\} \subset \mathbb{N}$, $\{\vec{a}, \vec{b}\} \subset B^m$, *єдиного розв'язку* $\left\{\vec{w}_n = \left(w_1^{(n)}, \ldots, w_m^{(n)}\right) : -p \le n \le q\right\}$ *крайової задачі* (8), *що відповідає еквівалентному* (1) *різницевому рівнянню* (6), *довільного* $k,\ 1 \le k \le p + q - 1,$ *виконується нерівність*

$$\left\| x_{-p+k} - w_1^{(-p+k)} \right\| \le L \left(\frac{C_2 + \|\vec{a}\|_m}{R^k} + \frac{C_2 + \|\vec{b}\|_m}{R^{p+q-k}} \right),$$

де стала $C_2 \ge 0$ *залежить від* $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, $\sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|$.

Теорема 3 є наслідком теореми 2.

1. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве //Укр. мат. журн. - 1991. - 43, № 1. -С.41-46.
2. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответсвующих краевых задач в банаховом пространстве // Мат. заметки. -1992. - 51.вып. 4. -С. 17-22.
3. *Данфорд Н.. Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962.-896 с.

Одержано 28.01.98.

після доопрацювання - 06.05.99