

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НАВКОЛО ОТВОРІВ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ІЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ

К.І.Шнеренко, В.Ф.Годзула, А.С.Богатирчук

Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України

Національний університет харчових технологій

1. Постановка задачі. Розглянемо напружений стан циліндричної оболонки із композитного матеріалу, послабленої двома круговими отворами, розміщеними на одній напрямній. Оболонка навантажена внутрішнім тиском інтенсивності q_0 .

Виділимо в оболонці окіл Ω , що містить отвори. Як відомо [1], зони концентрації напружень навколо отворів мають локальний характер і практично затухають на відстані одного – двох діаметрів цих отворів. Тому припускаємо, що границя Γ околу Ω настільки віддалена від контурів отворів Γ_0 , що зовні неї збурення напружень, спричинених наявністю отворів, практично затухають.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до системи криволінійних ортогональних координат (α, β) . В подальшому виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа, записаного для околу Ω :

$$\iint_{\Omega} \{ \delta V_0 - (p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_n \delta w + m_1 \delta \gamma_1 + m_2 \delta \gamma_2) \} A_1 A_2 d\alpha d\beta - \int_{\Gamma_1} (T_{tt}^0 \delta u_t + T_{ts}^0 \delta u_s + T_{th}^0 \delta w + G_{tt}^0 \delta \gamma_t + G_{ts}^0 \delta \gamma_s) d\Gamma = 0, \quad (1)$$

$$\delta V = T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \delta_{12} + G_1 \delta k_1 + G_2 \delta k_2 + 2H_{12} \delta k_{12} + Q_1 \delta \varepsilon_{13} + Q_2 \delta \varepsilon_{23},$$

де V_0 - питома енергія деформації; $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ - узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1(\alpha, \beta) + z\gamma_1(\alpha, \beta), \\ U_2 &= u_2(\alpha, \beta) + z\gamma_2(\alpha, \beta), \quad (-h/2 \leq z \leq h/2), \quad W = w(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд[1]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + k_\alpha w, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, \nu \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu}{B} \right) - 2k_{\alpha\beta} w,$$

$$\varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \delta(-k_\alpha u + k_{\alpha\beta} v), \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A \\ 2, \beta, B \end{pmatrix}, \quad 2\chi_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\gamma_1}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\gamma_2}{B} \right).$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки будуть:

$$T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad S_{12} = B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12},$$

$$G_1 = D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (4)$$

$$H_{12} = D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12}, \quad Q_1 = K_1\varepsilon_{13}, \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Тут B_{ij}, D_{ij}, K_i – узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Граничні умови на контурах отворів запишуться у вигляді:

$$T_\rho = \frac{q_0 R}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad S_{\rho\theta} = \frac{q_0 R}{2} \sin 2\theta, \quad Q = -\frac{qr}{2}, \quad G_\rho = H_{\rho\theta} = 0. \quad (5)$$

Підставивши (3) в (4), а останнє – в (1) з урахуванням (5), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$:

$$I(u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2) = 0.$$

2. Метод розв'язку задачі. Для розв'язку задачі застосуємо метод скінчених елементів [2]. Розбиваємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів. На кожному з цих елементів вводимо локальну систему координат (x_1, x_2) таку, що $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$. При цьому перетворення від локальних координат до глобальних здійснюється за допомогою функцій форми

$$\varphi_i = \frac{1}{4} (1 + x_{10})(1 + x_{20})(x_{10} + x_{20} - 1) \quad (i = 1, 3, 5, 7);$$

$$\varphi_i = \frac{1}{2} (1 - x_1^2)(1 + x_{20}) \quad (i = 2, 6); \quad \varphi_i = \frac{1}{2} (1 + x_{10})(1 - x_2^2) \quad (i = 4, 8) \quad (6)$$

співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha^i \varphi_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^8 \beta^i \varphi_i, \quad (7)$$

де $x_{10} = x_1 x_{1i}, \quad x_{20} = x_2 x_{2i}, \quad (x_{1i}, x_{2i}), \quad (\alpha^i, \beta^i)$ – координати i -го вузла відповідно в локальній і глобальній системах координат.

Переміщення на кожному з елементів інтерполюється поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^8 u_1^i \varphi_i, \dots, \gamma_2 = \sum_{i=1}^8 \gamma_2^i \varphi_i. \quad (8)$$

Тут $u_1^i, \dots, \gamma_2^i$ - шукані переміщення в i -му вузлі.

3. Числові результати. В таблиці наведені результати обчислень коефіцієнтів концентрації кільцевих зусиль $k_{1\theta}$ і моментів $k_{2\theta}$ в точках контуру отвору $\theta = 0; \pi/2; \pi$ для кількох значень параметрів $E/G, r/R, h/R$.

Таблиця

r/R	h/R	E/G	θ					
			0		$\pi/2$		π	
			$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$
0,1	0,08	2,6	0,66	0,75	2,59	0,26	2,26	2,38
		200	0,46	0,50	3,54	0,07	2,73	1,96
	0,01	2,6	0,42	2,24	5,03	-1,20	3,56	8,19
		200	0,32	2,07	5,06	-0,68	3,68	8,24
	0,08	2,6	0,54	1,49	3,80	-0,22	2,73	5,20
		200	0,19	1,06	5,16	-0,04	4,07	5,11
0,2	0,01	2,6	-0,38	5,62	7,74	-5,99	5,53	19,72
		200	-0,18	4,99	7,24	-4,06	7,75	18,87

Зміна E/G в інтервалі 2,6 - 200 веде до зменшення $k_{1\theta}$ і $k_{2\theta}$ в точках $\theta = 0$ і $\theta = \pi/2$ і збільшення (до 40 %) в точці $\theta = \pi$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т.1. Гузь О.М., Чернишенко І.С., Чехов Вал.М., Чехов Вік.М., Шнеренко К.І. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами. - Київ: Наук.думка, 1980.-636 с.
2. Богатырчук А.С., Шнеренко К.И. Применение метода конечных элементов к расчету трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки с отверстием // Прикл.механика.-1987.-23,№9.-С.125-128.

