

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

---

---

ИЗВЕСТИЯ  
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ПИЩЕВАЯ  
ТЕХНОЛОГИЯ

1971, №4

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

664.661:664.655

**КИНЕТИКА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТЕСТЕ—ХЛЕБЕ  
В ПРОЦЕССЕ ВЫПЕЧКИ**

**В. П. ДУЩЕНКО, В. А. ТАРАПОН, А. Ф. БУЛЯНДРА**

Киевский технологический институт пищевой промышленности

Для анализа многих технологических процессов пищевой промышленности и выбора оптимальных вариантов их интенсификации необходимо знание кинетики нестационарных полей температуры и влажностендераний в обрабатываемых материалах.

При решении некоторых конкретных задач регулирования технологических процессов (сушка, выпечка и др.) можно ограничиться в первом приближении только изучением кинетики температурных полей.

Математическая формулировка задачи для нахождения нестационарного температурного поля в тесте—хлебе, который рассматривается как слоистая среда, состоящая из трех неограниченных пластин, находящихся в тепловом контакте, дается уравнениями (1) — (5):

$$c_i \frac{\partial t_i(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_i \frac{\partial^2 t_i(x, \tau)}{\partial x^2} + f_i(x, \tau), \quad (1)$$

где  $c_i$  и  $\lambda_i$  — соответственно объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала;

$i = 1, 2, 3$  (индексы 1 и 3 соответствуют верхней и нижней коркам хлеба, 2 — мякишу;  $L_{i-1} \leq x \leq L_i$ ;  $L_i = L_{i-1} + l_i$ ;  $L_0 = 0$ );

$t(x, \tau)$  — температура материала,  $x$  и  $\tau$  — соответственно текущие координата и время.

Функции  $f_i(x, \tau)$  в уравнении (1) описывают суммарные источники тепла (затраты на незначительное испарение влаги с открытой поверхности и влияние термодиффузии влаги на теплоперенос в первом периоде, а также перегрев молярно перенесенного пара в верхней корке во втором периоде выпечки). Их аналитическое представление основывается на детальном анализе кинетики массопереноса в процессе выпечки, что для заводских опытов не представляется возможным. Функции  $f_i(x, \tau)$  при решении задачи приняты равными нулю.

Начальные условия имеют вид:  $t_i(x, 0) = t_0 = \text{const}$ , (2)

т. е. образец теста равномерно прогрет перед выпечкой.

На стыках пластин граничные условия четвертого рода:

$$\lambda_i \frac{\partial t_i(l_{i-0}, \tau)}{\partial x} - \lambda_{i+1} \frac{\partial t_{i+1}(l_{i+0}, \tau)}{\partial x} = \psi_{i,i+1}(\tau), \quad (3)$$

$$t_i(l_{i-0}, \tau) = t_{i+1}(l_{i+0}, \tau) \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

В выражении (3) функции  $\psi_{i,i+1}(\tau)$  приняты равными нулю. Строго говоря,  $\psi_{i,i+1}(\tau) = rb \gamma \frac{W}{100} [1]$ , где  $r$  — удельная теплота испаре-

ния;  $b$  — коэффициент углубления поверхности (зоны) испарения;  $\gamma$  — плотность материала;  $W$  — влагосодержание поверхности (зоны) испарения. Однако, полагая, что испаряющаяся в зоне корок влага перемещается главным образом в виде пара внутрь образца и конденсируется вблизи раздела корки — мякиш, и учитывая, что теплоты десорбции и сорбции мало различаются между собой, величину  $rb \gamma \frac{W}{100}$ , характеризующую затраты тепла на испарение влаги, можем исключить из граничных условий.

На внешних границах пластины граничные условия первого рода:

$$t_1(0, \tau) = U_1(\tau); \quad t_3(l_3, \tau) = U_3(\tau). \quad (5)$$

Граничные условия (5) при численных расчетах берутся из опытных данных.

Задача (1) — (5) решается для конкретного примера выпечки пшеничного хлеба в печи ХВК-2.

Весь процесс выпечки согласно установившимся представлениям может быть разделен на два периода: возрастающей и постоянной скорости влагоотдачи [1].

При расчетах температурных полей нами учтены зависимости ТФХ от температуры, а также влияние массопереноса на теплоперенос путем введения критерия  $K_\lambda$ , который, согласно данным [1], для первого периода выпечки приняли равным 0,14.

Величины усредненных эквивалентных ТФХ на основе наших и литературных данных взяты следующие:

для первого периода выпечки ( $\tau = 18$  мин)

$$\bar{c}_1 = 0,89 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}; \quad \bar{\lambda}_1 = 0,22 \text{ вт/м} \cdot \text{град}; \quad \bar{c}_2 = 1,48 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}; \\ \bar{\lambda}_2 = 0,58 \text{ вт/м} \cdot \text{град}; \quad \bar{c}_3 = 0,92 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}; \quad \bar{\lambda}_3 = 0,25 \text{ вт/м} \cdot \text{град}.$$

для второго периода:

$$\bar{c}_1' = 0,80 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}; \quad \bar{\lambda}_1' = \bar{\lambda}_1; \quad \bar{c}_2' = 1,11 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}; \\ \bar{\lambda}_2' = 0,50 \text{ вт/м} \cdot \text{град}; \quad \bar{c}_3' = 0,88 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}; \quad \bar{\lambda}_3' = \bar{\lambda}_3.$$

Толщины корок и теста — мякиша приняты постоянными. Первые в процессе выпечки незначительно изменяются за счет термодиффузии влаги и постепенного перемещения зоны испарения к центру теста — мякиша. Если учесть, что толщины корок невелики (в нашем случае  $l_1 = 2$  мм,  $l = 3$  мм) по сравнению с толщиной мякиша ( $l_2 = 70$  мм), то такое допущение практически приемлемо. Кроме этого, ТФХ корок рассчитывались как для составного тела: корка — тесто с учетом законов образования корок [1].

В последнее время в инженерной практике для нахождения нестационарных температурных полей широко применяют аналоговые вычислительные методы, среди которых, на наш взгляд, весьма перспективны методы моделирования нестационарной теплопроводности на электропроводной бумаге с распределенной емкостью [2, 3].

Электротепловая аналогия состоит в замене исследуемого температурного поля соответствующим полем электрического потенциала.

Распределение потенциала на электрической модели описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = C(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad (6)$$

где  $\rho(x, y)$  — удельная электропроводность, 1/ом;

$\varphi(x, y, \tau)$  — электрический потенциал, отн. ед., который связан

с соответствующей температурой зависимостью  $\varphi = \frac{t - t_{min}}{t_{max} - t_{min}}$ ;

$C(x, y)$  — средняя удельная распределенная емкость,  $\phi/м^2$ .

Из сопоставления уравнений природы (1) и модели (6) получаем

$$\text{критерий подобия для соответствующих зон: } \frac{C_m l_m^2}{\rho_m \tau_m} = \frac{c_n l_n^2}{\lambda_n \tau_n}, \quad (7)$$

где  $\rho_m$  и  $C_m$  — соответственно электропроводность и емкость единицы площади модели;

$l_m$  — характерный размер модели;

$\tau_m$  — время при моделировании;

$\lambda_n$  и  $c_n$  — коэффициент теплопроводности и объемная теплоемкость соответствующей зоны природы;

$l_n$  — характерный размер объекта моделирования (природы);

$\tau_n$  — реальное время моделируемого процесса.

Величины  $\lambda_n$ ,  $c_n$ ,  $l_n$  задаются непосредственно задачей;  $\rho_m$ ,  $C_m$ ,  $l_m$  определяются моделью. Отношение соответствующих величин в выражении (7) характеризуется следующими безразмерными величинами:

масштаб длины  $\alpha_l = \frac{l_n}{l_m}$ ; масштаб времени  $\alpha_\tau = \frac{\tau_n}{\tau_m} = \frac{c_n l_n^2 \rho_m}{\lambda_n C_m l_m^2}$ ;

масштаб емкости  $\alpha_c = \frac{C_n}{C_m}$ ; масштаб проводимости  $\alpha_\rho = \frac{\rho_m}{\lambda_n}$ . Выбор

множителей подобия ограничен только единственным требованием  $\frac{\alpha_l \alpha_c \alpha_\rho}{\alpha_\tau} = 1$ , и, следовательно, имеется возможность в широких пре-

делах подбирать практически удобные для осуществления параметры модели.

Расчет кинетики температурного поля в тесте—хлебе в процессе выпечки произведен на электроинтеграторе ЭИП 3/66 [3].

Для расчета температурных полей вначале изготовлялась электрическая модель трехслойной среды природы. Эта модель является основной и представляет собой три прямоугольника из электропроводной бумаги, выполненных в масштабе  $\alpha_l = 1/20$ . Удельные проводимости этой бумаги для каждой зоны модели подбирались так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\frac{\bar{\lambda}_3}{\bar{\lambda}_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2,7; \quad \frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_3} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = 2,3 \quad (\text{первый период выпечки});$$

$$\frac{\bar{\lambda}'_2}{\bar{\lambda}'_1} = \frac{\rho'_2}{\rho'_1} = 2,3; \quad \frac{\bar{\lambda}'_2}{\bar{\lambda}'_3} = \frac{\rho'_2}{\rho'_3} = 2 \quad (\text{второй период выпечки}).$$

Удельное сопротивление  $R_2 = \frac{1}{\rho_2}$ , моделирующее теплопроводность теста—мякиша, было выбрано 43 ком на квадрат модели.

Надежный контакт между границами прямоугольников осуществлялся путем прижатия бумаги на вакуумном столе.

Моделирование удельных теплоемкостей зон природы осуществлялось с помощью диэлектрических пленок, которые размещались под основной моделью. Для мякиша была выбрана пленка, обеспечивающая удельную емкость  $C_2 = 65 \cdot 10^{-8} \phi/м^2$ .

Удельное распределение электрических емкостей для двух других зон модели подбиралось, исходя из соотношений:

$$\frac{\bar{C}_2}{\bar{C}_3} = \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_3} = 1,8; \quad \frac{\bar{C}_2}{\bar{C}_1} = \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} = 1,8 \quad (\text{первый период выпечки};$$

$$\frac{\bar{C}_2'}{\bar{C}_3'} = \frac{\bar{c}_2'}{\bar{c}_3'} = 1,3; \quad \frac{\bar{C}_2'}{\bar{C}_1'} = \frac{\bar{c}_2'}{\bar{c}_1'} = 1,3 \quad (\text{второй период выпечки}).$$

Масштабы времени при выбранных параметрах модели соответственно равны  $\alpha_{\tau_1} = 2,4 \cdot 10^5$  и  $\alpha_{\tau_2} = 2,01 \cdot 10^5$  для первого и второго периодов выпечки. Тогда имеем для первого периода выпечки  $\tau_{м_1} = 4,5 \cdot 10^{-3}$  сек и для второго  $\tau_{м_2} = 1,8 \cdot 10^{-3}$  сек.

Для задания на основную модель распределенной емкости и заданных потенциалов для начального момента времени изготовлялась модель начальных условий из низкоомной бумаги, сопротивления квадрата которой  $R = 300$  ом. Размеры последней соответствовали размерам основной модели.

На внешних границах и в исследуемых точках основной модели и модели начальных условий были размещены шины из медной проволоки диаметром 0,4 мм, которые присоединялись к распределительной колодке. На модель начальных условий с делителя напряжения подавались потенциалы, соответствующие начальным распределениям температуры.

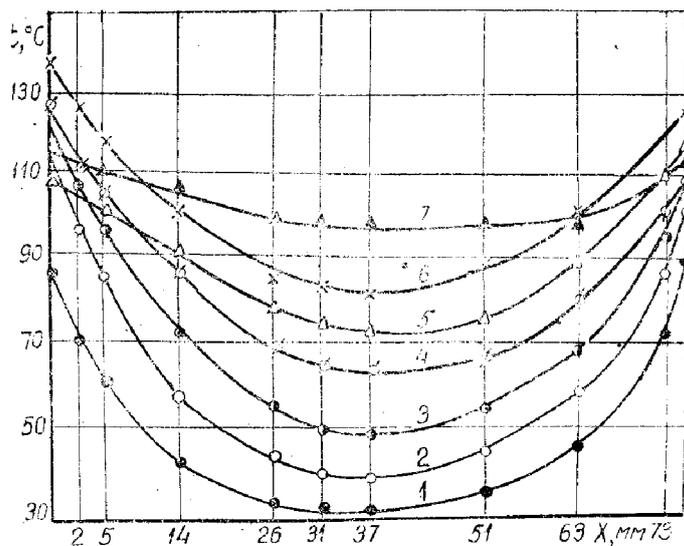
Для реализации граничных условий на шины, находящиеся на внешних границах основной модели, подавались потенциалы с  $R$ — $C$  цепочек, изменение которых подбиралось соответственно временным изменениям температуры на границах.

Вход интегратора подключался поочередно к шинам основной модели, размещенным в исследуемых точках. По величинам потенциалов, измеренных в этих точках в заданный момент времени, были рассчитаны температуры по формуле:

$$t = t_{min} + (t_{max} - t_{min}) \varphi.$$

Температуры  $t_{min}$  и  $t_{max}$  соответственно опыту были равны 30 и 140°C.

Замеры температуры в тесте—хлебе выполнены медь-константовыми дифференциальными термопарами с регистрацией на диаграммной ленте автоматического самопишущего потенциометра ЭПП-09М.



При измерении температуры в отдельных слоях образца теста—хлеба использовалась методика, предложенная А. С. Гинзбургом [1], которая обеспечивает перемещение горячего спая термопар вместе со слоем образца. Это, с нашей точки зрения, дает основание в первом приближении про-

вести сопоставление экспериментальных и теоретических данных для периодов постоянного и переменного объема выпечки. Провода термопар между пальцами люлек печи навивались спирально, что устраняло возможные их разрывы.

На рисунке представлены температурные поля пшеничного хлеба при выпечке, полученные на электроинтеграторе ЭИМП (сплошные линии) и опытные данные (экспериментальные точки). Кривые 1—7 соответствуют времени от начала выпечки  $\tau$  6, 12, 18, 24, 30, 36, 45 мин. Высота хлеба  $X$ , температура  $t$ , °С.

Анализ рисунка показывает хорошее совпадение опытных и расчетных данных относительно кинетики температурных полей при выпечке хлеба.

#### ВЫВОД

Для расчета нестационарных полей температуры в процессе выпечки хлеба можно использовать аналоговые методы, в частности, электроинтегратор ЭИМП 3/66.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург А. С. Теплофизические основы процесса выпечки. Пищепромиздат, М., 1955.
2. Тарапон А. Г. Некоторые вопросы прикл. математики и аналог. техники, вып. 2, 3. «Наукова думка», Киев, 1966.
3. Тарапон А. Г. Республ. межведомств. сб. «Математическая физика», вып. 6, 175. «Наукова думка», Киев, 1968.