

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор _____ **С. В. Іванов**
(підпис)

«___» _____ **2014 р.**

Т.М. ГОРЛОВА

МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів спеціальностей 8.05010101 «Інформаційні
управляючі системи і технології», 8.05010105 «Комп'ютерний
еколого-економічний моніторинг» денної форми навчання

Всі цитати, цифровий та фактичний
матеріал, бібліографічні відомості
перевірені. Написання одиниць
відповідає стандартам
Підпис(и)
автора(ів) _____

«___» _____ 2014 р.

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри
інформаційних систем
як електронний конспект лекцій
Протокол № 4
від 22.11.2013 р.

Реєстраційний номер
електронного конспекту лекцій
у НМВ 51.11- 06.03.2014

КИЇВ НУХТ 2014

Горлова Т.М. Математична теорія систем. [Електронний ресурс] : конспект лекцій для студентів спеціальностей 8.05010101 «Інформаційні управляючі системи і технології», 8.05010105 «Комп'ютерний еколого-економічний моніторинг» денної форми навчання / Т.М. Горлова - К.: НУХТ, 2014. – 57 с.

Рецензент: **В. А. Литвинов**, д-р техн. наук

Т.М. ГОРЛОВА, канд. техн. наук

Подано в авторський редакції

©Т.М. Горлова, 2014

© НУХТ, 2014

З М І С Т

Вступ	4
1. Ієрархічної структури	6
1.1. Основні поняття багаторівневої ієрархічної структури	6
1.2. Основні поняття в задачах прийняття рішення	15
1.3. Математичне формулювання задачі прийняття рішення	15
1.4. Властивості ефективних альтернатив і засоби їх знаходження	23
1.5. Поняття про рішення задачі багатокритеріальної оптимізації	30
Запитання для самоперевірки	33
2. Методи обмежень	35
2.1. Метод обмежень при пошуку компромісних рішень в задачах векторної оптимізації	35
2.2. Метод обмежень в багатокритеріальній задачі лінійного програмування	39
2.3. Методи надання переваг на множині функцій цілей	41
Запитання для самоперевірки	44
3. Ієрархічні системи управління і їх особливості	46
3.1. Головні особливості ієрархічних систем	46
3.2. Різниця між ієрархічними системами управління і централізованими	47
3.3. Опис ієрархічної системи управління з наданою структурою	48
3.4. Координація в ієрархічних системах управління	52
3.5. Координація дворівневої ієрархічної системи управління	53
Запитання для самоперевірки	57

ВСТУП

Науково-технічна революція сприяла збільшенню складності досліджуваних об'єктів. Раніше в якості об'єктів розглядалися динамічні системи, поведінка яких описувалося диференціальними рівняннями - звичайними або в частинних похідних. Основна увага приділялася динамічним характеристикам об'єкта, таким як стійкість руху, час перехідного процесу, величина перерегулювання і т. п., вимогам переведення частини змінних в заданий стан при оптимізації певної цільової функції тощо. В даний час основна увага приділяється дослідженню систем, що представляють собою не один об'єкт, а сукупність об'єктів, поведінка яких може і не описуватися диференціальними рівняннями.

Розглянемо кілька прикладів. Це насамперед автоматизовані системи управління технологічними процесами, об'єктами, що рухаються, автоматизовані системи організаційного чи адміністративного управління, інтегровані системи управління підприємствами тощо. Наприклад, автоматизована система управління енергетикою включає в себе джерела сировини, водні ресурси, джерела енергії, електростанції, підстанції ліній передач та споживачів енергії.

В автоматизованих системах управління підприємствами об'єктами управління є основні фонди, матеріальні ресурси, що надходять від інших систем, трудові ресурси, фінансові ресурси, продукти виробництва, послуги, технічна документація. Якщо зазначені сукупності об'єктів розглядати в якості об'єкта управління, то стане ясно, що більшість завдань, що виникають при дослідженні таких систем, неможливо вирішити, якщо втиснути все різноманіття в один квадрат, який на структурній схемі відображає об'єкт управління, як це було прийнято при дослідженні звичайних систем управління. Втрачається можливість ставити такі завдання, як виявлення взаємозв'язків між компонентами розглянутих систем, доцільна декомпозиція і агрегування цих компонент, побудова інформаційних масивів та їх використання в системі для задач керування об'єктами тощо.

Таким чином, швидкий розвиток і ускладнення техніки, збільшення масштабів і вартостей заходів, що проводяться при створенні нових систем, широке впровадження автоматизації в сферу управління - все це призвело до необхідності введення поняття складної системи цілеспрямованого поведінки і формулювання наукового підходу до дослідження таких систем на новій методологічній основі.

В даний час не існує загального визначення складної системи. Тому дослідники в залежності від типу об'єкта дослідження вводили те чи інше

поняття складної системи, яке зазвичай справедливо для одного об'єкта, але не завжди справедливо для іншого.

До особливостей складних систем можна віднести наявність великого числа взаємопов'язаних між собою підсистем. Розчленування системи на підсистеми в даний час не формалізоване і носить евристичний характер в залежності від цілей дослідження складної системи. Крім того складні системи характеризуються багатомірністю та різноманітністю цілей окремих підсистем, що входять в систему, і різноманітністю вимог, що пред'являються до досліджуваної системи з боку інших систем.

Для ієрархічних систем управління з заданою структурою дослідження властивостей всієї системи в цілому, виходячи з властивостей окремих підсистем, приводить до задачі вибору компромісного управління між підсистемами різних рівнів, а дослідження властивостей окремих підсистем, виходячи з властивостей всієї системи в цілому, приводить до задачі визначення вимог до якості функціонування підсистем.

Основними завданнями при проектуванні складних систем управління є формування альтернативних шляхів побудови проектованої системи (формування варіантів системи), формування критеріїв її оцінки, вибір компромісного варіанту. Чим більше буде сформовано альтернативних шляхів створення системи, тим з більшою ймовірністю можна гарантувати, що при виборі компромісного варіанту буде обрано найкращий. Нижче будуть розглянуті методи й алгоритми розв'язання викладених проблем стосовно дослідження та проектування складних систем.

1. Ієрархічної структури

1.1 Основні поняття багаторівневої ієрархічної структури

Розвиток електронно-обчислювальної техніки, математичних методів кібернетики, системного аналізу, дослідження операцій, економіко-математичного моделювання і теорії автоматичного управління дозволяють в теперішній час розв'язувати проблеми, пов'язані з автоматичним або автоматизованим управлінням складними технічними об'єктами та великими виробничими комплексами. Прикладами рішення таких задач можуть бути автоматизовані системи управління великими хімічними виробництвами, енергетичними та металургійними комплексами, підприємствами харчової промисловості.

Таких задач дуже багато і до них можна віднести наступні:

розробка прогнозів і програм розвитку галузі, а також довгострокове планування виробництва по всьому комплексу підприємств;

середньострокове та короткострокове техніко-економічне планування;

оперативне управління галуззю, задачі обліку, контролю і аналізу виконання планів і результатів виробничо-господарською діяльністю по підприємствам і організаціям галузі і в цілому по галузі;

планування і управління постачанням підприємств галузі і збутом готової продукції;

планування і управління капітальним будівництвом та реконструкцією існуючих підприємств.

Кожна з таких задач, зазвичай, розв'язується організаціями зі складною ієрархічною організаційною структурою. Тому в автоматизованих системах управління головну роль грають питання вибору ефективних організаційних структур, розподілення прав та обов'язків, координації та керівництва їх сумісної діяльності [1, 2, 4].

Жодна з існуючих теорій не може претендувати на те, що вона може правильно описати роботу організації, тому що організація має велику кількість аспектів, для дослідження яких необхідно використовувати різні дисципліни. Більш того, організації настільки різноманітні як за розміром, так і за призначенням, що говорити про організацію взагалі – це велике спрощення [2].

Теорії, що досліджують такі об'єкти як організація можна розділити на **три** категорії: **класичні (структуровані), поведінкові (мотиваційні) та системно-орієнтовані**.

Класична теорія має тенденцію розглядати учасника організації просто як «інструмент», який виконує конкретну задачу. Тобто учасник повинен виконувати свою задачу – найбільш ефективно виконати своє завдання. Такий підхід використовується для дослідження дій виробничих

бригад, які обслуговують автоматизовану лінію, але він не може описати або дослідити діяльність таких учасників як менеджери, директора, що знаходяться на більш високих рівнях організації.

Теорія поведінки (мотивація) досліджує реакцію учасника на різні стимули або дії як з середини даної формальної організації, так і з боку інших груп, до яких він одночасно належить. Теорія акцентує свою увагу на особистих якостях учасника, а не на його ролі в організації.

В системне-орієнтованих підходах, таких як промислова динаміка, відсутнє чітке розподілення на окремих учасників. Функціонування всієї системи в цілому описується в динамічних термінах (математичними моделями або за допомогою імітаційних моделей). При цьому її зміни досліджуються без урахування у явному вигляді фактору, що залежить від людини.

Розглянемо, який вклад вносить багаторівневий системний підхід до рішення наступних питань [1- 4]:

- характерні особливості окремо розглянутих членів організації – її учасників;
- засоби відображення структури організації;
- методи дослідження в цієї області.

Організаційна структура, яка показана на рис. 1.1, відображає ієрархію сопідпорядкованих її членів. Різним елементам, які відображені на схемі, відповідають різні конкретні цілі.

Структура організації в класичній теорії вважається статичною.

Організаційна структура, яка показана на рис. 1.1, відображає ієрархію сопідпорядкованих її членів. Різним елементам, які відображені на схемі, відповідають різні конкретні цілі.

Будь-яка ієрархія складається з вертикальної сопідпорядкованості підсистем. Це означає, що система в цілому складається з множини підсистем, які взаємодіють між собою, як показано на рис. 1.2.

Структура організації



Рис.1.1. Структура організації

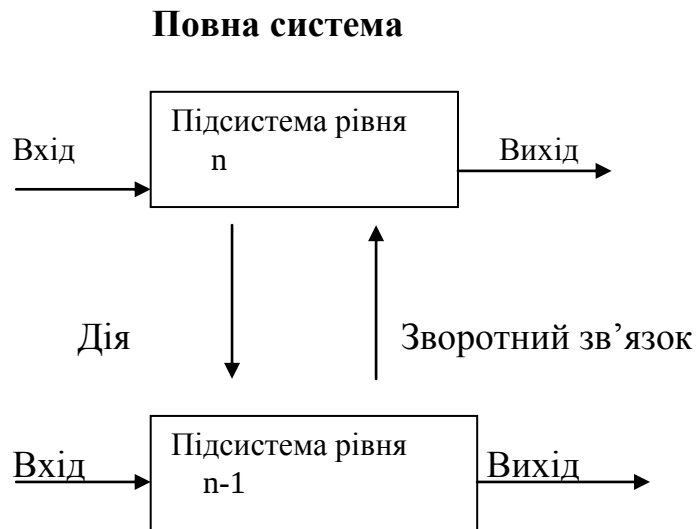


Рис. 1.2. Повна система

Під **системою** або **підсистемою** розуміють здійснення процесу перетворення вхідних даних в вихідні. Це перетворення може бути або динамічним, яке існує в реальному часі з наперед заданим детермінованим алгоритмом і операціями, які виконуються послідовно, або являє собою так звану процедуру “рішення проблеми”. В останньому випадку декомпозиція носить концептуальний характер. Ми маємо сукупність послідовних операцій, які необхідно виконати в різний час і в різній послідовності (системи з не детермінованим алгоритмом). Відмітимо, що як входи так і виходи можуть бути розміщені по всіх рівнях, але найчастіше обмін інформацією з середовищем відбувається на більш низькому рівні системи (на найнижчому).

На діяльність підсистеми будь-якого рівня безпосередньо впливає підсистема, яка розташована на один рівень вище. Пріоритет дій має напрямок зверху вниз, у вигляді наказів або команд. Успішність дії системи в цілому залежить від поведінки всіх елементів системи.

Найчастіше розглядають три види ієрархічних систем, які відображають класифікацію ієрархії. Класифікація підкреслює різницю, але не виключає можливість існування систем, які одночасно належать до різних класів.

1) Система складається з множини взаємодіючих підсистем, які чітко виділені.

2) Деякі з підсистем є підсистемами, що приймають рішення.

3) Елементи, які приймають рішення, розташовуються ієрархічно, тобто знаходяться під впливом або під керуванням інших елементів.

Розглядають три поняття рівнів:

- рівень опису, або абстрагування;
- рівень складності прийняття рішення;

- організаційний рівень.

Для їх визначення були введені наступні терміни : **“страта”, “шар” і “ешелон”**.

Системи прийняття рішення поділяють на :

- а) **однорівневі одноцільові системи**. Ціль визначається для всієї системи і всі змінні обираються так, щоб забезпечити досягнення цієї цілі;
- б) **однорівневі багатоцільові системи**. Система складається з елементів, які приймають рішення і мають свої особисті цілі. Ці цілі можуть бути конфліктними або не конфліктними;
- в) **багаторівневі багатоцільові системи**. Ці системи характерні наявністю ієрархічних відношень між елементами системи, які приймають рішення. **Існування командного елемента вищого рівня – принципова особливість** таких систем. Проблема прийняття рішення на рівні цього елемента є головною проблемою в теорії багаторівневих систем.

К особливостям ієрархічних систем можна віднести наступні риси:

- елемент верхнього рівня має справу з більш великими підсистемами, або широкими аспектами поведінки системи в цілому;
- період прийняття рішення для елемента верхнього рівня більший, ніж для елементів нижчих рівнів;
- елемент верхнього рівня має справу з більш повільними аспектами поведінки всієї системи;
- опис і проблеми на верхніх рівнях менш структуровані, містять багато невизначеності і їх формалізувати дуже важко.

В **системно-орієнтованих підходах** головний об’єкт вивчення – загальна еволюція системи в часі.

Класичний підхід базується на спостереженнях за дійсними процесами і на реальних задачах, які виконуються в реальних організаціях. Моделі, які розроблені за допомогою цього підходу, більше відповідають неформальним, ніж формальним організаціям.

Системні дослідження і дослідження за допомогою персонального комп’ютера призводять до машинного моделювання. Найбільш вдалим є підхід до опису організації є підхід Саймона, в якому учасник організації розглядається як особа, що приймає рішення (ОПР). При цьому, при описі глобальної цілі організації використовується поняття ієрархічності – багаторівневості.

В теперішній час не існує загального визначення складної системи. Дослідники в залежності від типу об’єкту дослідження вводили різні поняття складної системи, яке вірно для одного об’єкту, але не вірно для іншого. Багато дослідників працювало і зараз працюють в цієї галузі науки по дослідженню складних об’єктів і їх моделюванню.

До характерних особливостей складних систем можна віднести [1, 2]:

1. Наявність великої кількості взаємопов'язаних між собою підсистем. Представлення системи у вигляді підсистем в теперішній час не формалізовано і носить евристичний характер в залежності від цілей дослідження складної системи. Наприклад, при побудові автоматизованих систем управління підприємствами, які є типовим прикладом складної системи, виділення підсистем часто виробляють за функціональними ознаками і ознаками забезпечення ресурсами процесів виробництва і управління. Можливе також виділення підсистем за видами об'єктів управління, що входять до складу складної системи; іноді підсистемами ставлять у відповідність завдання, рішення яких необхідно здійснити для виконання основної задачі, поставленої перед створюваною складною системою. Тобто розбиття складної системи на підсистеми доцільно проводити таким чином, щоб вони представляли собою самостійно функціонуючі частини системи, які вирішують свої завдання управління, тобто володіють правом самостійного прийняття рішення.

2. Багатовимірність системи, яка зумовлена наявністю великої кількості зв'язків між підсистемами.

3. Багатокритеріальність, яка зумовлена різноманітністю цілей окремих підсистем, які складають складну систему, а також різноманітністю вимог, які пред'являються до системи, що досліджується, з боку інших систем.

4. Різноманіття структури, яке зумовлено різноманітністю структур підсистем, так і різноманітністю структур поєднання підсистем до єдиної системи.

5. Багатомаїття природи підсистем, яке характеризується їх різноманітною фізичною суттєвістю.

Таким чином, складність системи характеризується не просто збільшенням розмірності, але і багатокритеріальністю, ієрархічністю структури, наявністю підсистем різної природи. Хоча складна система і складається з сукупності окремих підсистем, але функціонування їх підпорядковано досягненню єдиної цілі для всієї системи в цілому.

Таким чином, дослідження і проектування складних систем потребує нового підходу до постановки задачі синтезу системи управління. Таким підходом є системний підхід, під яким розуміють сукупність методів, що розглядають складну систему управління як деяку множину взаємопов'язаних підсистем, які діють як єдина система.

Специфіка системного підходу полягає в наступному [1, 3]:

1) При дослідженні складної системи управління опис окремих підсистем не носить самостійного характеру, оскільки окремі підсистеми описуються з врахуванням їх місця в системі в цілому.

2) Одна і та ж підсистема розглядається як підсистема, яка має одночасно різні характеристики, показники, функції і навіть різні принципи побудови.

3) Дослідження складної системи управління невід'ємно від середовища, в якому вона функціонує.

4) Дослідження властивостей всієї системи в цілому проводиться з урахуванням властивостей окремих підсистем, і навпаки, досліджуються властивості окремих підсистем, які виходять з властивостей всієї системи в цілому.

5) Процес дослідження системи носить ітераційний характер.

6) При системному підході завжди вибирається компромісний варіант системи, яка досліджується, що в свою чергу, пов'язано з використанням однієї кількісної міри, тобто єдиного узагальненого критерію, сформованого на множині системних показників.

7) Увага дослідників концентрується на улагодженні взаємозв'язків між окремими підсистемами, які входять до складу складної системи управління з ціллю задоволення потреб, які накладаються на всю систему в цілому.

Розглянемо основні проблеми, рішення яких складає суттєвість системного підходу.

Однієї з таких проблем, які існують при дослідженні ієрархічних систем управління з заданою структурою та при проектуванні складних систем довільного типу є введення єдиної кількісної міри, тобто єдиного узагальненого критерію, сформульованого для всієї системи в цілому на множині системних показників. Для ієрархічних систем управління з заданою структурою дослідження властивостей всієї системи в цілому, виходячи з властивостей окремих підсистем, призводить до задачі вибору компромісного управління підсистемами різних рівнів. А дослідження властивостей окремих підсистем, виходячи з властивостей системи в цілому, приводить, в свою чергу, до задачі визначення вимог якості функціонування підсистем.

Таким чином, в більшості випадків при проектуванні систем керування критерії якості відображаються через динамічні властивості. Дуже важливо отримати задовільну динамічну характеристику системи, якою потрібно управляти. Але, це тільки частина задачі проектування. Треба врахувати і інші фактори, які представляють інтерес для проектувальника системи управління.

Такими факторами можуть бути:

- вартість обладнання,
- вага обладнання,
- надійність роботи кожного виду обладнання,
- можливість здійснення ремонту обладнання,
- сумісність з іншими критеріями оцінки обладнання,

- робочий час, необхідний для конструювання та випробування системи управління тощо.

Всі ці фактори впливають на процес вибору системи, що проектується і їх необхідно враховувати з самого початку процесу проектування. При цьому обрана система повинна бути найкращою за всіх інших систем, що розглядаються за всіма факторами, які враховуються при проектуванні.

Зазвичай така система відшукується наступним чином. Розглядається деяка система, потім вона досліджується різними засобами і робиться висновок – чи задовольняє вона всім необхідним вимогам. Якщо висновок від'ємний, то в системі робиться деяка зміна, а потім вона знов досліджується. Цей процес повторюється до тих, поки система, що проектується, не буде задовольняти конструкторів за всіма вимогами (критеріями). При цьому конструктор не в змозі вказати який конкретно критерій він використовує і як цей критерій оцінює різні фактори, які враховуються при проектуванні.

Такий процес може давати різні результати, вони залежать від досвіту роботи і від його суб'єктивного погляду на ці проблеми. Тому розробка методів і алгоритмів рішення вказаної проблеми дозволила б в значній мірі виключити суб'єктивізм при прийнятті рішень і надала б можливість проводити синтез системи за допомогою комп'ютера.

В складних системах управління з наданою ієрархічною структурою не достатньо обрати стратегію між підсистемами різних рівнів ієрархії. При рішенні оптимальних задач в підсистемах рухаючись по дереву цілей знизу, тому що при цьому підсистеми нижчих рівнів можуть працювати в небажаних для них режимах. Все це може призвести до виходу з роботи цих підсистем.

Крім того, підсистеми нижчих рівнів складної системи можуть нести втрати за особистими локальними критеріями оптимальності. Все це може призвести до протиріччя інтересів підсистем верхнього та нижчого рівнів, що і є приводом для конфлікту. Якщо конфлікт носить не антагоністичний характер (тобто підсистеми погоджуються на компроміс), то рішення цієї конфліктної ситуації призводить до задачі вибору компромісних стратегій в подібних системах. Рішення цієї задачі пов'язано з проблемою прийняття рішення з врахуванням різних критеріїв оптимізації.

Друга група задач проблеми полягає у тому, що підтримувати роботоздатність всієї системи в цілому на необхідному рівні. Це призводить до задачі визначення необхідної якості функціонування підсистем, що виходять з заданої якості функціонування всієї системи в цілому.

Велика кількість функцій і підсистем, які притаманні складним системам, потребує для проектування комплексного підходу, що дозволяє

проектувати систему в цілому, а не по окремим підсистемам. Однак недостатній розвиток методів такого комплексного підходу призводить до того, що при великій кількості підсистем, які мають різні принципи функціонування і складні взаємозв'язки між собою, термін проектування займає дуже багато часу. Оскільки процес проектування зазвичай розкладається на етапи, то при системному підході він будується таким чином, щоб об'єм даних про систему, що проектується, управління на кожному наступному етапі зростав. Однак серед множини побудованих цим засобом варіантів системи існують такі, які незадовільні з точки зору або обмежень, що накладаються на систему, або деяких критеріїв, які враховуються при проектуванні. Процес проектування на кожному етапі складається з генерації множини варіантів складної системи управління з глибокою деталізацією цього етапу і вибору групи варіантів, які задовольняють його обмеженням і критеріям. На наступному етапі відібрані варіанти пророблюються більш детально, тобто з глибинної деталізацією цього етапу, і серед них знову здійснюється вибір тощо. Відібрані варіанти не завжди задовольняють обмеженням і критеріям наступних етапів, тому що нема можливості провести цю оцінку на попередніх етапах. При цьому виникає необхідність розгляду проектування як ітераційного процесу, що призводить до збільшенню терміна проектування. Завдяки цьому к моменту закінчення розробки системи вона може стати або зовсім непотрібною, або морально старою, тому що за цей час можливо проявлення нових технічних елементів з характеристиками, які є більш вдалимими ніж ті, що закладені в проект. Тому однієї з найважливіших наукових і прикладних задач є розробка методології раціонального проектування складних систем управління.

Основними задачами системного підходу при проектуванні складних систем управління є наступні:

- формування альтернативних шляхів побудови системи, що проектується, (формування варіантів системи),
- формування критеріїв оцінювання системи,
- вибір компромісного варіанта.

Треба відмітити, що чим більш буде сформовано альтернативних шляхів створення системи тим з більшою ймовірністю можна гарантувати, що при обиранні компромісного варіанта буде обраний найкращий. Однак чим більша кількість варіантів, тим більш інформації необхідно для прийняття рішення і тим складнішим є процес відбору рішення.

В зв'язку з цим і виникає ще одна задача системного підходу до проектування – розробка методів відсіву варіантів, які не задовольняють тим чи іншим вимогам системи в цілому. Це призводить до побудови процедури цілеспрямованого відбору компромісного варіанту.

1.2 Основні поняття в задачах прийняття рішення

Більшість ситуацій, які зустрічаються в будь-якій діяльності людини, пов'язані з необхідністю прийняття рішення. Це такі ситуації, в яких людина або група людей вибирають ту чи іншу дію для отримання бажаного результату. Будь-якій ситуації присутні загальні елементи [1-3].

- Множина змінних, значення яких обираються людиною, яка приймає рішення (ЛПР). Ці змінні називаються **управлінськими діями**.

- Множина змінних, які залежать від вибору управлінських дій. Їх називають **вихідними змінними** ситуації прийняття рішень.

- Множина змінних, значення яких не регулюються ОПР. Ці змінні можуть залишатися визначеними при рішенні тієї чи іншої задачі, а в деяких випадках змінюються незалежно від ОПР. В першому випадку такі змінні називаються **параметрами задачі**, а в другому – **зовнішніми обуреннями**. В залежності від постановки задачі одні і ті змінні можуть бути як параметрами так і зовнішніми обуреннями.

- інтервал часу T , на якому приймається рішення в ситуації, що розглядається.

- Математична модель ситуації прийняття рішення, яка являє собою множину співвідношень, що пов'язують управлінські дії і параметри задачі, що розглядається, з вихідними змінними.

- Обмеження, що відображають вимоги, що накладаються на ситуацію прийняття рішення на вихідні змінні і управлінські дії.

- Цільова функція (**критерій оптимальності**), за допомогою якої оцінюється властивості рішення, що обирається. При цьому цільова функція повинна являти собою змінну, яка залежить від управлінських дій в відповідності з математичною моделлю ситуації прийняття рішення.

1.3 Математичне формулювання задачі прийняття рішення.

Визначимо [3]:

U – множина векторів управлінських дій;

P - множина векторів параметрів;

Ω - множина векторів зовнішніх дій;

Y – множина векторів вихідних змінних .

Математична модель ситуації описується відображенням W у вигляді

$$W: P \times U \times \Omega \rightarrow Y. \quad (1.1)$$

В залежності від виду відображення існують різні типи математичних моделей ситуації прийняття рішень.

Математичні моделі можуть бути статистичними і динамічними. Якщо параметр P і зовнішні обурені Ω ситуації прийняття рішень залишаються незмінними за час T , то математична модель буде статичною. В протилежному випадку маємо динамічну модель прийняття

рішень. Відображення, яке описує статистичну модель, може бути задано різними засобами: графіком, таблицею, алгоритмом обчислення вихідних змінних, функцією (лінійною, нелінійною, опуклою, не опуклою) тощо. Відображення, яке описує динамічну модель, може бути задано різними класами диференціальних або розносних рівнянь лінійного або нелінійного типу.

Крім того, математичні моделі розрізняються видом зовнішніх обурень, які можуть бути випадковими і невипадковими. Якщо обурення невипадкові, то їх можна віднести до параметрів P ситуації прийняття рішення і тоді детермінована модель буде описуватися відображенням виду

$$W: P \times U \rightarrow Y. \quad (1.2)$$

Якщо обурення є випадковими, то вихідні змінні також будуть випадковими і їх розподілення при заданих параметрах P будуть визначатись розподіленням зовнішніх обурень. Стохастична модель прийняття рішення описується відображенням (1.1).

Розглянемо приклад побудови математичної моделі прийняття рішень.

Задача про дієту.

Нехай є n різних продуктів.

$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

Необхідно знайти добову потребу кожного продукту і визначити при цьому склад в раціоні поживних речовин і елементів (білків, вуглеводів, жирів, заліза, кальцію тощо), які необхідні людині.

Параметрами даної задачі є види продуктів і кількість корисних речовин або елементів в одиниці i -го продукту. **Вихідними** змінними задачі є кількість речовин та елементів у сукупності різних продуктів. Врахуємо, що **обурення** (наприклад, псування продуктів) в задачі, що розглядається, відсутні і, крім того, на кожну добу потреба в продуктах вибирається незалежно, тобто процес прийняття рішень є однокроковий.

Позначимо:

- $y = \{y_i\} (i=1, \dots, m)$ - набір речовин, набір яких має інтерес для нас в раціоні;

- вектор $p_i = \{p_{ij}\} (j=1, \dots, m, i=1, \dots, n)$ – кількість речовин в i -м типі продуктів;

- вектор $u = \{u_i\} (i=1, \dots, n)$ – кількість продуктів, які входять в добову потребу людини.

Оскільки в одиниці i -го продукту знаходиться p_{ij} j -й речовини, то в u_i одиницях його знаходиться $p_{ij} * u_i$. Тоді загальна кількість j -й речовини в добовій нормі буде $y_j = \sum p_{ij} u_i, (j=1, \dots, m)$.

Останнє співвідношення визначає математичну модель задачі, що розглядається.

Для того, щоб побудувати ситуацію прийняття рішення, необхідно сформулювати обмеження і цільову функцію.

Обмеження в випадку, що розглядається, визначаються медичним змістом і мають вигляд:

$$\sum p_{ij} u_i \geq b_j \quad (j=1, \dots, m). \quad (1.3)$$

Останні умови будуть виконуватись, якщо взяти достатню кількість кожного з продуктів u_i . Задача прийняття рішення в цьому випадку виникати не буде, якщо не враховувати вартості продуктів, що використовуються, оскільки всі рішення, які задовольняють обмеженням будуть еквівалентні між собою. Якщо c_i ($i=1, \dots, n$) вартість одиниці i -го продукту, то вартість добової потреби буде дорівнювати

$$F(u) = \sum c_i u_i \quad (1.4)$$

Ситуація прийняття рішення зводиться до вибору добової потреби продуктів, щоб задовольнити потреби продуктів на добу (обмеження (1.3)) і мінімізувати вартість (1.4).

В залежності від математичної моделі обмеження, які описують ситуацію прийняття рішення, можуть бути представлені одним з наступних засобів.

1. Статична модель з неперервними управляючими впливами

$$u = \{u_i\} \quad (i=1, \dots, n).$$

а) Нелінійні обмеження:

$$G^{(H)} = \{u : u \in U \subseteq E^{(n)}, u \geq 0, g(u) \leq b\}, \quad (1.5)$$

де компоненти вектор-функції обмежень $g(u) = \{g_j(u)\} \quad (j=1, \dots, m)$ – є нелінійні і неперервне диференційовані функції,

$b = \{b_j\} \quad (j=1, \dots, m)$ – вектор – стовпець констант обмежень,

0 – вектор стовпець, який має тільки 0 .

б) Лінійні обмеження:

$$G^{(L)} = \{u : u \in U \subseteq E^{(n)}, u \geq 0, Au \leq b, h'_i \leq u_i \leq h''_i, i=1, \dots, n\}, \quad (1.6)$$

де A – задана матриця розмірності $m \times n$, h'_i – нижня границя зміни i -й компоненти вектора управляючих впливів, а h''_i – верхня.

в) Змішані обмеження :

$$G^{(C)} = G^{(H)} \cap G^{(L)}, \quad (1.7)$$

де $G^{(H)}$ описуються співвідношеннями (1.5), а $G^{(L)}$ - співвідношеннями (1.6). В виразах (1.5) - (1.7) індекс (н) визначає не лінійність обмежень, а індекс (л) – лінійність, індекс (с) – змішані обмеження.

Обмеження (1.5)- (1.7) визначають опуклу область.

2. Статична модель з дискретними управляючими впливами

$$u \in V \subseteq E^n.$$

Тут V – є декартовим добутком кінцевих множин U_i , тобто

$$V = \prod_{i=1}^n U_i, U_i = \{u_{i9L0}\} \quad (l_i = 1, \dots, \xi_i), \quad \text{де } \xi_i - \text{число елементів множини } U_i.$$

Кількість елементів

$$V_j = u_{1(l_1)}, \dots, u_{i(l_i)}, \dots, u_{n(l_n)} \quad \text{множини } V = \{v_j\} \text{ визначається числом}$$

$$N = \prod_{i=1}^n \xi_i.$$

При цьому для випадку, що розглядається, обмеження в задачі прийняття рішення можуть визначатись співвідношеннями (1.5) - (1.7), або мати наступний вигляд:

$$D = \{ u : u \in V, g_p(V_j) = \sum_{i=1}^n g_p(u_{i(l_i)}) \leq b_p, \quad p = 1, \dots, m \}, \quad (1.8)$$

де $g_p(u_{i(l_i)}) \quad p = 1, \dots, m$ - довільні функції дискретного аргументу, які задаються у табличному виді.

3. Динамічна модель з інтервалом часу $\tau = [t_0, T]$

(t_0 - початковий момент, а T – кінцевий момент).

а) Обмеження D_t з неперервним часом визначаються сукупністю співвідношень :

- диференціальними зв'язками, записаними через динаміку зміни вихідних змінних

$$\dot{y} = F(y, u, t) \quad (1.9)$$

- умовами меж, які задаються співвідношеннями в просторі (y, t) у вигляді:

$$d_0^l(y(t_0), t_0) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, S_0 \leq n; \quad (1.10)$$

$$d_T^l(y(T), T) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, S_T \leq n;$$

б) Інтервал часу τ , на якому приймаються рішення, може бути заданий дискретним чином з кроком ΔT , тобто

$\tau = [t_0, T = t_0 + M \Delta T]$, де M – кількість кроків, на яких приймаються рішення.

Обмеження $D_{\Delta t}$ з дискретним часом будуть описуватись розносними рівняннями.

Розглянемо випадки, в яких виникає задача прийняття рішення, тобто задача вибору.

Якщо для кожної з вказаних моделей існує єдиний вектор управляючих дій, які задовольняють обмеженням, то задачі прийняття рішень не виникає. Ця проблема виникає коли управлінська дія не єдина.

Сукупність управлінських дій, що задовольняють обмеженням, які описують математичну модель ситуації прийняття рішень, називають **множиною альтернатив A** , з яких необхідно знайти рішення. Вибір той чи інший альтернативи в ситуації прийняття рішення залежить від властивостей альтернативи, які характеризуються цільною функцією $f(\alpha)$.

Найкращім вважається така управлінська дія, для якої значення цільової функції буде найбільшим (або найменшим). В залежності від виду цільової функції і виду обмежень задачі, що оптимізуються, будуть відноситися до різних типів задач математичного програмування, оптимального управління, варіаційного числення.

Цільова функція може бути побудована не єдиним засобом. Для прийняття рішення необхідно задати властивість альтернатив, на основі якого в подальшому здійснюється вибір. Однак завдання тільки однієї властивості не призводить до вірного результату при виборі, тому іноді необхідно враховувати одночасно декілька різних властивостей альтернатив, що обираються.

Вибір управлінських дій з врахуванням однієї властивості називається прийняттям простого рішення, а вибір управлінських дій з врахуванням сукупності властивостей – прийняттям складного рішення, або задачею багатокритеріальної оптимізації.

Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації і її особливості.

Розглянемо ситуацію прийняття рішень на заданій множині допустимих альтернатив, які описуються одним з видів обмежень (1.5) – (1.9),

$$G^{(H)} = \{u : u \in U \subseteq E^{(n)}, u \geq 0, g(u) \leq b\} \quad (1.5)$$

$$G^{(J)} = \{u : u \in U \subseteq E^{(n)}, u \geq 0, Au \leq b, \\ h'_i \leq u_i \leq h''_i, i = 1, \dots, n\} \quad (1.6)$$

$$G^{(C)} = G^{(H)} \cap G^{(J)}, \quad (1.7)$$

$$D = \{u : u \in V, g_p(V_j) = \sum_{i=1}^n g_p(u_{i(l_j)}) \leq b_p, \quad p = 1, \dots, m\}, \quad (1.8)$$

$$\dot{y} = F(y, u, t) \quad (1.9)$$

з врахуванням сукупності властивостей, які описуються множиною функцій цілей $f = \{f_i(\alpha)\}$ ($\alpha \in A, i \in I$). Нехай $I = \{1, \dots, M\}$ – множина індексів, які відповідають сукупності властивостей, з врахуванням яких приймається рішення, M – кількість цих властивостей.

Нехай m перших функцій цілі – максимізуються, а $M-m$ – мінімізуються. Відповідно визначимо дві множини індексів

$$I_1 = \{1, \dots, m\} \quad i \quad I_2 = \{m+1, \dots, M\}. \quad (1.11)$$

Для того, щоб сформулювати задачу прийняття складного рішення в термінах багатокритеріальної оптимізації розглянемо питання порівняння альтернатив.

Приклад.

Нехай необхідно вибрати одну управлінську дію з наданої дискретної множини векторів $V = \{V_j\}$, ($j = 1, \dots, 5$) з врахуванням двох цільових функцій $f_1(V_j)$, $f_2(V_j)$, які представлені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

V	f	$f_1(V_j)$	$f_2(V_j)$
V_1		5	3
V_2		4	1
V_3		3	2
V_4		6	6
V_5		5	4

Перша цільова функція визначає вагу і вимірюється в кг, а друга цільова функція визначає витрати для кожної управляючої дії і вимірюється в гривнях. Необхідно обрати таку управляючу дію, яка буде мати мінімальні витрати і максимальну вагу.

Легко бачити за даними таблиці, що по цім цільовим функціям $V_1 \succ V_5$, $V_2 \succ V_3$ (знак « $\succ$ » означає, що альтернатива домінує), але в якому

відношенні знаходяться між собою всі інші дії сказати не можна. Які ж альтернативи вважати найкращими на множині цільових функцій? Якщо $\alpha_1 \succ \alpha_2$, то альтернатива α_1 має більшу перевагу ніж α_2 , або при переході від α_2 до α_1 , ми нічого не втрачаємо ні по одному з критеріїв. В цьому випадку можна сказати, що α_1 домінує α_2 .

Якщо на множині допустимих альтернатив для деякої альтернативи α_0 існує хоча б одна альтернатива $\hat{\alpha}$ є такою, що $\hat{\alpha} \succ \alpha_0$, то α_0 називається **домінуючою**. Якщо такої альтернативи α_0 не існує, то $\hat{\alpha}$ називається не домінуючою або ефективною. Тобто

$$\begin{cases} f_i(\hat{\alpha}) \geq f_i(\alpha_0), & \forall i \in I_1, \\ f_i(\hat{\alpha}) \leq f_i(\alpha_0), & \forall i \in I_2, \end{cases} \quad (1.12)$$

α_0 - ефективна альтернатива на всій множині критеріїв, або оптимальною по Парето. Це означає, що нема альтернативи, яка може "покращити" значення деяких функцій цілі, не погіршив значення інших цільових функцій.

Питання існування ефективних альтернатив тісно пов'язане з існуванням оптимуму по кожній функції цілей окремо.

Іноді в задачах багатокритеріальної оптимізації має сенс розглядати не тільки множину допустимих альтернатив A (співвідношення (1.5) - (1.9)), але й множину значень функцій цілей $f_i(\alpha)$. Функції цілей мають різну фізичну розмірність, вони характеризують різні властивості рішення, що обирається. В зв'язку з цим має зміст розглядати не множину функцій цілей $f_i(\alpha)$, а еквівалентну множину функцій

$$W = \{w_i(f_i(\alpha))\} \quad i \in I,$$

де $w_i(f_i(\alpha))$ $i \in I$ - монотонні перетворення, які приводять функції цілі до безрозмірного вигляду і дозволяють порівнювати їх значення.

Визначимо $W \subseteq E^M$ як множину значень функцій $W = \{w(\alpha)\}$.

$$w \in W, \quad w = \{w_i\}, \text{ де } w_i = w_i(\alpha) = w_i(f_i(\alpha)) \quad \forall i \in I,$$

$$\alpha \in A$$

Кожній альтернативі α відповідає повністю визначений вектор і навпаки, кожному w відповідає хоча б одна альтернатива $\alpha \in A$.

Для w' і w'' , які належать W , мають місце співвідношення:

$$w' \succ w'' \leftrightarrow \begin{cases} w'_i \geq w''_i, \forall i \in I_1 & - \text{слабка перевага} \\ w'_i \leq w''_i, \forall i \in I_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$w' \succ w'' \leftrightarrow w'_i = w''_i \quad \forall i \in I \quad \text{еквівалентність} \quad (1.14)$$

$$w' \succ w'' \leftrightarrow \begin{cases} w'_i \geq w''_i, \forall i \in I_1 & - \text{строга перевага} \\ w'_i \leq w''_i, \forall i \in I_2 \\ i \text{ } w' \text{ не еквівалентне } w''. \end{cases} \quad (1.15)$$

Вектор $w_0 \in W$, якій відповідає ефективній альтернативі α_0 , називається ефективним. Вектор $w_0 \in W$ є ефективним, якщо не існує векторів w , які належать множині W таких, що $w \succ w_0$. Визначимо через $Z(w) \subseteq E^m$ множину векторів $Z \in E^m$, які не строго домінують $w \in W$, тобто

$$Z(w) = \{z : z \succ w\} = \{z : z_i \geq w_i \quad \forall i \in I_1, z_i \leq w_i, \forall i \in I_2\}. \quad (1.16)$$

Не важко бачити, що будь-який вектор $z \in Z(w)$, якій відрізняється від w , буде строго домінувати w , тобто $z \succ w$.

Вектор $w_0 \in W$ називається ефективним, якщо він є єдиним загальним вектором множини $Z(w_0)$ і w , тобто

$$W \cap Z(w_0) = w_0.$$

Приклад.

Нехай в деякій ситуації прийняття рішень множина W описується таким чином :

і ці обидві функції максимізуються.

$$W = \{w : w \in E^2; 0,5 \leq w_1 \leq 3; 0,5 \leq w_2 \leq 3; w_2 \leq \frac{2}{w_1}\}$$

$$w_2 \leq \frac{2}{w_1}, \quad 0,5 \leq w_1 \leq 3,$$

Будь-яка точка гіперболи

яка обмежує множину W є ефективною.

1.4 Властивості ефективних альтернатив і засоби їх знаходження

Розглянемо властивості ефективних альтернатив [1, 2]. Ці властивості сформулюємо не для функцій цілі $f = \{f_i(\alpha)\}$, $(i \in I)$, а для множини функцій $W = \{w_i(\alpha) = w_i(f_i(\alpha))\}$ $(i \in I)$, які складаються з монотонних перетворень окремих функцій цілі, що призводять їх до **безрозмірного** вигляду і до задачі мінімізації.

Нехай всі $w_i(\alpha) > 0$ мінімізуються і приведені до безрозмірного вигляду.

Сформулюємо властивості ефективних альтернатив:

1. Якщо множина допустимих альтернатив A – опукла, а функції цілі $w_i(f_i(\alpha))$ - вигнуті, то для будь-якої ефективної α_0 існує такий вектор $c = \{c_i\}$ $(i \in I)$ з компонентами

$$c_i \geq 0, \quad \sum_{i \in I} c_i = 1, \quad \text{що лінійний критерій } F(\alpha) = \sum_{i \in I} c_i w_i(\alpha) \quad (1.17)$$

досягає мінімуму на множині A при $\alpha = \alpha_0$.

2. Нехай α_0 - ефективна альтернатива множини функцій цілі $W = \{w_i(\alpha)\}$, $w_i(\alpha) \forall i \in I$.

Тоді існує вектор $c = \{c_i\}$ $(i \in I)$ з компонентами $c_i > 0$,

$\sum_{i \in I} c_i = 1$, такий, що критерій

$$F(\alpha) = \max_{i \in I} c_i w_i(\alpha) \quad (1.18)$$

досягає мінімуму на множині допустимих альтернатив A , які описуються співвідношеннями виду (1.5) – (1.9) при $\alpha = \alpha_0$. В якості компонент c_i

можна взяти числа $\frac{\lambda_i}{\lambda}$, де

$$\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i, \quad \lambda_i = \frac{1}{w_i(\alpha_0)}.$$

Ця **теорема - властивість** була доведена Гермейером і вона цікава тому, що не накладає ніяких умов на вигляд функції $w_i(\alpha)$ і на обмеження (1.5)– (1.9).

Якщо α_0 - ефективна альтернатива множини функцій цілі f , то для будь-якого $l \in I_1$

$$\begin{aligned}
f_l(\alpha_0) &= \max f_i(\alpha), \\
f_i(\alpha) &\geq f_i(\alpha_0) \quad \forall i \in I_1, \quad i \neq l, \\
f_i(\alpha) &\leq f_i(\alpha_0) \quad \forall i \in I_2, \\
\alpha &\in A.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

або для будь-якого $l \in I_2$

$$\begin{aligned}
f_l(\alpha_0) &= \min f_i(\alpha), \\
f_i(\alpha) &\geq f_i(\alpha_0) \quad \forall i \in I_1, \\
f_i(\alpha) &\leq f_i(\alpha_0) \quad \forall i \in I_2, \quad i \neq l, \\
\alpha &\in A.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Відповідно до властивостей ефективних альтернатив існує три засоби їх знаходження.

Засіб 1.

Множина ефективних альтернатив для множини функцій цілі $f = \{f_i(\alpha)\}$ може бути знайдена шляхом поєднання альтернатив $\alpha_i^0 \quad \forall i \in I$, які оптимізують кожну з f_i , з рішенням наступної задачі параметричного програмування відносно параметрів

$$\begin{aligned}
\gamma_i &\in \Gamma^+ = \{\gamma_i : \gamma_i > 0 \quad \forall i \in I, \quad \sum_{i \in I} \gamma_i = 1\}, \\
\min_{\alpha \in A} \{F(\alpha) &= \sum \gamma_i w_i(\alpha)\},
\end{aligned} \tag{1.21}$$

де для всіх $i \in I$ $w_i(\alpha)$ є вигнутими неперервними функціями, а область допустимих альтернатив A є опуклою замкнутою множиною.

В цьому випадку, коли функції $w_i(f_i(\alpha))$ не є **вгнутими**, або множина допустимих альтернатив не опукла, тоді (20) не дозволяє відшукати всю множину ефективних альтернатив.

Приклад.

Нехай область допустимих альтернатив задана обмеженнями (1.7) (Змішані обмеження)

$$G^{(c)} = G^{(n)} \cap G^{(l)}$$

тобто

$$G^{(c)} = \{u : u \in U \subseteq E^2; u_i > 0 \quad (\forall i = \overline{1,2}),$$

$$0,5 \leq u_1 \leq 3; \quad 0,5 \leq u_2 \leq 5; \quad u_2 \geq 4 - u_1^2 \},$$

а множина функцій цілі складається з двох,

$$f = \{f_1(\alpha) = u_1, \quad f_2(\alpha) = u_2\}$$

і обидві функції мінімізуються (рис. 3.).

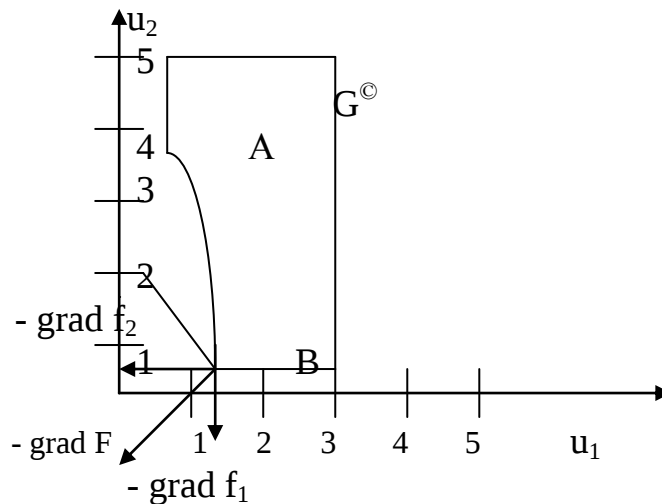


Рис. 1.3

Легко бачити, що в цьому прикладі множина ефективних альтернатив є дуга АВ.

Область допустимих альтернатив **не опукла**. Тому при будь-яких

$$\gamma_1, \gamma_2 > 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

в результаті мінімізації лінійного узагальненого критерію (1.21) $F(u) = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2$ буде знайдено не більш ніж 2 альтернативи А и В.

Засіб 2.

Множина ефективних альтернатив для множини функцій цілі $f = \{f_i(\alpha)\}$ може бути знайдена шляхом поєднання альтернатив $\alpha_i^0 \quad \forall i \in I$, які оптимізують кожну з $f_i(\alpha)$, з наступною задачею параметричного програмування відносно параметрів $\gamma_i \in \Gamma^+$:

$$\min_{\alpha \in A} \{F(\alpha) = \max \gamma_i w_i(\alpha)\}, \quad (1.22)$$

де для всіх $i \in I$ $w_i(\alpha)$ є монотонні перетворення функцій цілі $f_i(\alpha)$. У даному випадку необхідність вгнутості і неперервності функцій $w_i(\alpha)$ і

опуклості множин допустимих альтернатив не накладається, але необхідно враховувати, що рішення задачі (1.22) може бути не єдиним для обраних значень параметрів $\gamma_i \in \Gamma^+$, і не всі знайдені альтернативи можуть бути ефективними.

Приклад.

Нехай множина допустимих альтернатив задана дискретною множиною $V = \{v_j\} \quad \forall j = \overline{1,5}$ зі значеннями функцій $w_1(\alpha)$ і $w_2(\alpha)$ з таблиці 1.2.

Обидві функції мінімізуються.

Таблиця 1.2

v_j	$w_1(\alpha)$	$w_2(\alpha)$
V_1	2	5
V_2	4	3
V_3	4	2
V_4	5	2
V_5	6	1

Очевидно, якщо $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$, то мінімум функцій досягається при $\alpha = V_2$ та $\alpha = V_3$, тобто рішення не є єдиним. Але $V_3 \succ V_2$, тому що V_3 має краще значення по іншій функції цілей, тобто ефективним з них є тільки варіант V_3 .

В розглянутих випадках для різних монотонних перетворень при одних і тих значеннях параметрів будуть існувати різні ефективні альтернативи. Однак при переборі всіх параметрів $\gamma_i \in \Gamma^+$ множини ефективних альтернатив співпадають.

Приклад.

Нехай множина допустимих альтернатив A задана лінійними обмеженнями виду (1.6)

$$\alpha \in G^{(I)} = \{u: u \in U \subseteq E^2, u_i \geq 0, (i=1,2), u_1 + u_2 \leq 1000, 5u_1 + 3u_2 \geq 3500\},$$

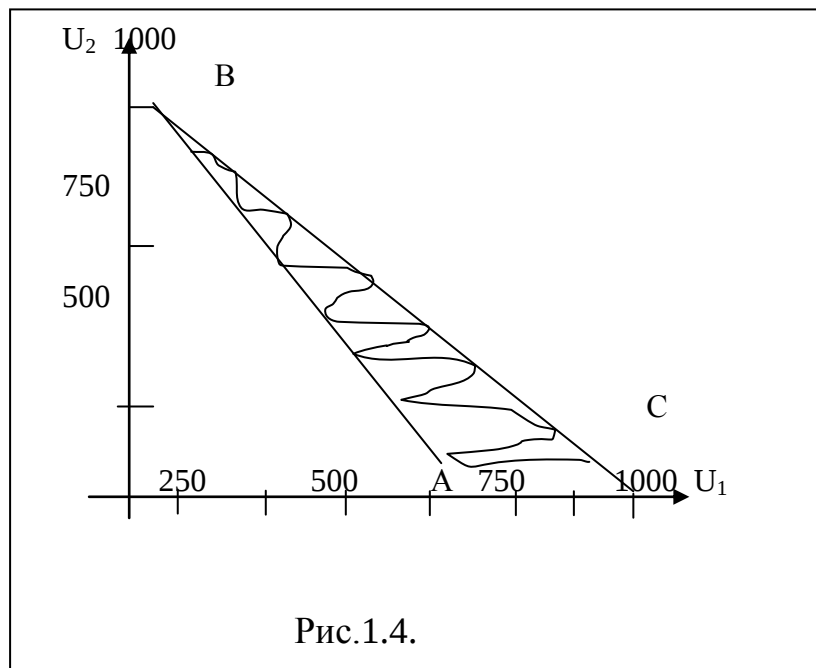
а функції цілі мають вигляд

$$f_1(\alpha) = 37,5 u_1 + 30 u_2 \rightarrow \max,$$

$$f_2(\alpha) = 50 u_1 + 25 u_2 \rightarrow \min.$$

У просторі управлінських змінних U множина допустимих альтернатив має вигляд такий, як на рис.4. Для введення перетворень $w_1(\alpha)$ і $w_2(\alpha)$

знайдемо максимум та мінімум функцій цілей, які існують при заданих обмеженнях. Перша цільова функція досягає свого максимуму в точці $C(1000,0)$ і $f_1(C) = 37500$.



Найменше значення її знаходиться у точці $A(700,0)$ і $f_1(A) = 26250$.

Друга функція цілі має мінімум у точці $B(250,750)$ і $f_2(B) = 31250$, а максимум в точці C , $f_2(C)=50000$.

У якості перетворень $w_i(\alpha)$, $i=1,2$ оберемо перетворення двох типів:

$$W^1 = \{w_1^1(u) = \frac{37500 - 37,5u_1 - 30u_2}{11250}, w_2^1(u) = \frac{50u_1 + 25u_2 - 31250}{18750}\},$$

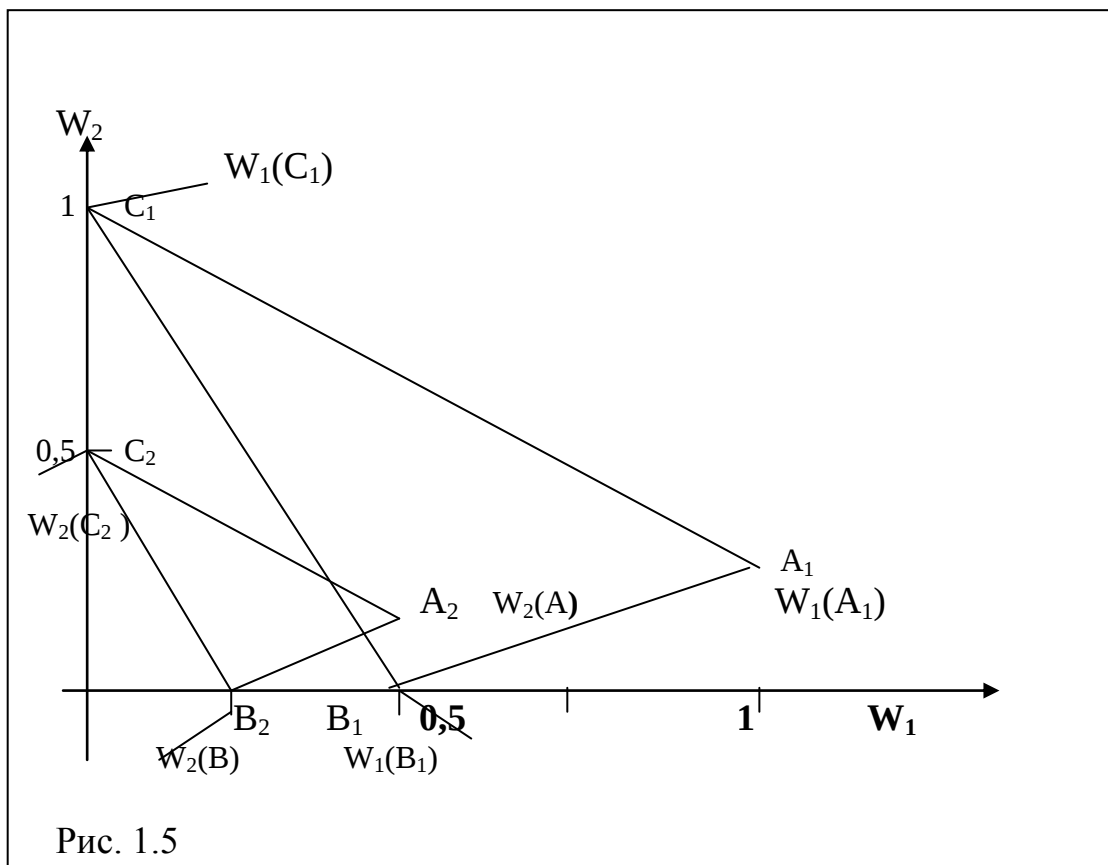
$$W^2 = \{w_1^2(u) = \frac{37500 - 37,5u_1 - 30u_2}{37500}, w_2^2(u) = \frac{50u_1 + 25u_2 - 31250}{31250}\}.$$

В даному прикладі множина ефективних альтернатив – ребро ВС. Покажемо множину допустимих альтернатив в просторі обраних перетворень W_1 і W_2 (рис.1.5).

Якщо шукати компромісні альтернативи, використовуючи перший засіб при вагових коефіцієнтах $\gamma_1 = 0,8$ $\gamma_2 = 0,2$, то для перетворень W_1 і W_2 будуть знайдені різні ефективні альтернативи. Для першого перетворення мінімум критерію (1.20) буде досягнутий в точці С, а для іншого перетворення мінімум того самого критерію буде знаходитись на всіх точках ребра СВ.

Якщо обрати вагові коефіцієнти $\gamma_1 = 2/3$ $\gamma_2 = 1/3$, то мінімум критерію (20) для першого перетворення буде досягнуто на всіх точках ребра СВ, а для другого перетворення – в точці В.

Якщо у якості перетворень $w_i(\alpha)$ обрати $w_i(\alpha) = (w_i^1(\alpha))^1$ $i = 1, 2$, то при $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ мінімум критерію (20) буде знаходитись в точці (294,706). У той самій час, при цих вагових коефіцієнтах для перетворення W_2 – у точці В.



Засіб 3.

Множина ефективних альтернатив для функцій цілі множині f може бути знайдена при рішенні задачі параметричного програмування відносно параметрів $z \in Z^{M-1}$;

$$\max_{\alpha} f_i(\alpha) \quad (1.23)$$

при наявності обмежень

$$\begin{aligned} f_i(\alpha) &\geq z_i, \quad \forall i \in I_1, \quad i \neq l \\ f_i(\alpha) &\leq z_l, \quad \forall i \in I_2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\alpha \in A,$$

де Z^{M-1} - паралелепіпед виду

$$\prod_{i \in I_1, i \neq l} [f_{i(\min)}^0, f_i^0] * \prod_{i \in I_1, i \neq l} [f_i^0, f_{i(\max)}^0],$$

f_i^0 - оптимальне значення функції цілі,

$f_{i(\min)}$ – найменше значення функції, якщо вони максимізуються,

$f_{i(\max)}$ – найбільше значення функції, якщо вони мінімізуються.

В якості головної функції, що оптимізується, обирається та функція цілі, оптимум якої досягається тільки в ефективних точках. Якщо в якості критерію, що оптимізується, буде обрана функція цілі множини f_i , яка мінімізується, то обмеження (1.24) для функцій цілі, що максимізуються, записується для всієї множини I_1 , а обмеження для функцій цілі, що мінімізуються, записується для всіх $i \in I_2, \quad i \neq l$.

Таким чином, знаходження множини ефективних альтернатив зводиться до рішення задачі параметричного програмування для всього набору значень параметрів $\gamma \in \Gamma^+$ або $z \in Z^{M-1}$ і різних типів узагальнених критеріїв (1.21)-(1.23). Виникає питання, при яких значеннях параметрів $\gamma \in \Gamma^+, z \in Z^{M-1}$ рішення цих задач буде давати ефективні альтернативи.

Критерій $F(\alpha) = F(w_1(\alpha), \dots, w_M(\alpha))$ називається ефективним, якщо оптимум цього критерію на заданій множині допустимих альтернатив досягається в ефективній альтернативі.

Методи знаходження ефективних альтернатив в принципі дозволяють знайти всю множину ефективних альтернатив, але не дають відповідь на питання, як обрати єдине рішення в ситуації, що розглядається. Ця проблема потребує додаткової інформації, яка пов'язана з евристикою.

Перший й найпростіший шлях знаходження єдиного рішення полягає в тому, що компетентній групі експертів надається уся множина ефективних альтернатив з оцінками по всіх функціях цілей, з якої вони відшуковують єдине рішення.

При цьому виборі експерти розглядають нерівноцінність різних функцій цілі.

В більшості випадків побудувати всю множину ефективних альтернатив не можливо, або дуже важко. Це пов'язано з важкістю рішення задачі параметричного програмування.

Другий шлях знаходження єдиного рішення полягає в тому, що евристику використовують або на початку рішення і при виборі кінцевого результату, або послідовно на різних етапах процедури вибору з ціллю зменшення множини рішень, що аналізується, до одного.

1.5 Поняття про рішення задачі багатокритеріальної оптимізації

Прийняття складного рішення зводиться до знаходження такої альтернативи з множини допустимих, яка може не бути оптимальною ні для однієї з функцій цілі, але є найкращою на множині функцій цілі f , тобто до знаходження компромісної альтернативи [1-3].

Під найкращою будемо розглядати існування на множині A такої альтернативи, при якій величина відхилення від оптимальних значень по кожній функції цілі

$$\Delta f_i(\alpha) = \begin{cases} f_i^0 - f_i(\alpha) & \forall i \in I_1, \\ f_i(\alpha) - f_i^0 & \forall i \in I_2. \end{cases}$$

досягає найменшого значення. Через f_i^0 позначено оптимальне значення i -й функції цілі на множині допустимих альтернатив. Оскільки найменше значення величини $\Delta f_i(\alpha) \forall i \in I$ не досягається одночасно на одній альтернативі, то виникає необхідність порівнювати ці величини між собою. При цьому при прийнятті складного рішення використовують додаткову інформацію від експертів, тобто евристику.

Евристичні аспекти:

- визначення кількісних характеристик, які дозволяють порівнювати значення відхилень від оптимальних значень функцій цілі різною розмірності;
- завдання переваг на множені функцій цілі, з врахуванням яких приймається рішення.

Використання цих евристик при виборі компромісного (рішення) альтернативи говорить про те, що вони вводяться експертом на початковій стадії побудови формальної процедури пошуку. Потім

дослідник повинен застосувати такий метод пошуку рішення, який дозволяє знайти рішення в відповідності з прийнятими евристичними.

Оскільки функції цілі множини f мають різну розмірність, то необхідно визначитися, які кількісні характеристики кожній з функцій $f_i(\alpha)$ можна порівнювати один з одним. Для цього кожній функції множини f надамо деяке перетворення $w_i(f_i(\alpha))$, яке приводить $f_i(\alpha)$ до безрозмірного вигляду.

Ці перетворення повинні задовольняти наступним вимогам:

- врахувати необхідність мінімізації величини відхилення від оптимальних значень по кожній функції цілі;
- мати спільний початок відліку і один порядок зміни значень на всій множині допустимих альтернатив;
- збереження відношення переваг на множині альтернатив, які порівнюються на множині функцій цілі f .

В якості такого перетворення можна обрати одну з монотонних функцій:

$$w_i(f_i(\alpha)) = \begin{cases} \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_{i(\min)}} & \forall i \in I_1, \\ \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0} & \forall i \in I_2. \end{cases} \quad (1.25)$$

$$w_i(f_i(\alpha)) = \begin{cases} \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0} & \forall i \in I_1, \\ \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_i^0} & \forall i \in I_2, \end{cases} \quad (1.26)$$

$$w_i(f_i(\alpha)) = \tilde{w}_i^\mu(f_i(\alpha)) \forall i \in I, \quad (1.27)$$

де $f_{i(\min)}, f_{i(\max)}$ - відповідно найменше значення критеріїв, що максимізуються і найбільше значення критеріїв, що мінімізуються, які вони отримують на множині допустимих альтернатив.

У виразі (26) $\tilde{w}_i^\mu(f_i(\alpha))$ можуть визначатись співвідношеннями (1.25), (1.26), а показник ступені μ є цілим числом, $\mu \geq 2$.

Величини $w_i(f_i(\alpha)) \quad \forall i \in I \quad \forall \alpha \in A$ лежать завжди в межах $[0;1]$ для перетворень (1.25).

Для перетворення (1.26) $w_i(f_i(\alpha))$ можуть не знаходитися в цих межах.

Визначимо, яку альтернативу будемо рахувати рішенням задачі багатокритеріальної оптимізації, якщо обрана множина функцій $W = \{w_i(\alpha)\} \quad i \in I$, кожна з яких мінімізується, $0 < w_i(\alpha) < 1$ і надана перевага на множині цілей f .

Визначення.

Для кожної допустимої альтернативи $\alpha \in A$ такій, що $0 < w_i(\alpha) < 1 \quad \forall i \in I$, в просторі W існує вектор $\rho \in P^+$, якій задовольняє співвідношенням

$$\rho = \{\rho_i\} = \{\rho_i : \rho_i > 0, \quad \forall i \in I, \quad \sum_{i \in I} \rho_i = 1\} \quad (1.28)$$

і число $k_0 > 0$, таке, що альтернатива $\alpha \in A$ задовольняє одночасно M рівнянням

$$\rho_i w_i(\alpha) = k_0 \quad i \in I \quad (1.29)$$

Довільний вектор вагових коефіцієнтів $\rho \in P^+$, якій задовольняє співвідношенням (1.28), будемо інтерпретувати як **перевага** функцій цілі множини f , яке виражається в кількісній мірі.

Під рішенням задачі векторної оптимізації будемо вважати таку компромісну альтернативу, яка належить множині ефективних альтернатив і знаходиться на заданому напрямку, який визначається вектором $\rho \in P^+$, в просторі W значень обраних перетворень функцій цілі множини f .

Визначення.

Якщо α_0 - ефективна альтернатива для заданого вектора $\rho \in P^+$, то їй відповідає найменше значення параметра k_0 , при якому система рівнянь

$$\rho_i w_i(\alpha) = k_0 \quad i \in I.$$

Або під рішенням задачі векторної оптимізації для заданого **вектора переваги** $\rho \in P^+$ розуміється компромісна альтернатива $\alpha^k \in A$, яка забезпечує однакові мінімальні вагові відносні втрати $\tilde{w}_i(\alpha) = \rho_i w_i(\alpha)$, за всіма критеріями одночасно.

Запитання для самоперевірки

1. Характерні особливості складних систем.
2. Які існують категорії опису організаційних структур.
3. Що таке класичний (структурований) підхід?
4. Ознаки поведінкового (мотиваційного) та системно-орієнтованого підходів.
5. Однорівневі одноцільові системи.
6. Однорівневі багатоцільові системи.
7. Багаторівневі багатоцільові системи.
8. Основні задачі системного підходу при проектуванні складних систем управління.
9. Основні поняття в задачах прийняття рішення.
10. Математичне формулювання задачі прийняття рішення.
11. Особливості статичної моделі з неперервними управляючими впливами.
12. Особливості постановки задачі багатокритеріальної оптимізації.
13. Властивості ефективних альтернатив.
14. Засоби знаходження ефективних альтернатив.
15. Поняття про рішення задачі багатокритеріальної оптимізації.

Література

1. Згуровський, М.З. Розвиток інформаційного суспільства в Україні: монографія / М.З. Згуровський, М. К. Родіонов, І. Б. Жил'яєв — К.: НТУУ «КПІ», 2006. - 543 с.
2. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем: монография / М. Месарович, Д. Мако, И. Такахара; пер. англ. под ред. И.Ф. Шахнова — М.: изд-во «Мир», 2003. — 387 с.
3. Михалевич, В.С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем: монография / В.С. Михалевич, В. Л. Волкович — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2002. — 348 с.
4. Мыльников, В.В. Исследование систем управления: учебное пособие для ВУЗов / В.В. Мыльников, Б.П. Титаренко, В.А. Волочиенко. — 2-е изд., перераб. и допол. — М.: Академический проспект; Екатеринбург : Деловая книга, 2003. — 352 с.

2. Методи обмежень

2.1 Метод обмежень при пошуку компромісних рішень в задачах векторної оптимізації

Визначення

Для того, щоб альтернатива $\alpha^* \in A$, $w_i(\alpha^*) > 0 \quad \forall i \in I$, була ефективною при заданому векторі переваг $\rho \in P^+$, достатньо, щоб α^* була єдиним рішенням системи нерівностей [3]

$$\rho_i w_i(\alpha^*) \leq k_0 \quad \forall i \in I. \quad (2.1)$$

для мінімального значення параметра k_0^* , при якому система сумісна.

У просторі W компромісних альтернатив існує точка для якої мінімально можливі зважанні втрати по всіх критеріях однакові.

$$\rho_i w_i(\alpha) = k_{0(\min)} \quad i \in I.$$

Якщо такої точки не існує, тобто промінь, що визначається вектором переваг ρ , не перетинає область ефективних альтернатив, то для компромісній альтернативи буде відповідати відповідна точка, яка найближча до променя.

Для знаходження компромісного рішення побудуємо ітераційний процес з параметром $k_0 \in (0, \frac{1}{M})$, на кожному кроці якого перевіряється сумісність системи нерівностей (2.1) для $\alpha \in A$ і заданого вектора ρ . Параметр $k_0 \in (0, \frac{1}{M})$ обмежує відносні втрати $w_i(\alpha) = w_i(f_i(\alpha)) \quad \forall i \in I$. При $k_0 \rightarrow 0$ відносні втрати наближаються до нуля, тобто функції цілі $f_i(\alpha)$ прямують до своїх оптимальних значень, а при $k_0 \rightarrow \frac{1}{M}$ нерівності (2.1) задовольняються на всій множині допустимих альтернатив A . Зменшуючи параметр k_0 і зменшуючи при цьому вагові втрати за всіма функціями цілей, ми наближаємося до альтернатив, які забезпечують мінімальні втрати за всіма критеріями $f_i(\alpha)$, тобто до компромісної альтернативи.

Ітераційний процес зупиняється, коли найменше $k_0(l)$ (l – номер кроку), при якому система нерівностей (2.1) на множині допустимих альтернатив ще сумісна, відрізняється від найближчого значення $k_0(l+1)$, при якому система вже не сумісна, не більш ніж на $\varepsilon \geq 0$.

Значення величини ε задається з урахуванням часу рішення задачі, який має зміст. При цьому, якщо рішення системи нерівностей єдине, то це і є шукана компромісна альтернатива. Якщо рішення не єдине, то для отримання альтернатив відносності втрати еквівалентні з точністю до ε .

Єдину компромісну альтернативу можна отримати, оптимізує на цій множині еквівалентних з точністю до ε альтернатив будь-який узагальнений критерій. В якості такого критерію можна обрати критерій вигляду

$$F(\alpha) = \sum_{i \in I} \rho_i w_i(\alpha) \quad (2.2)$$

і мінімізувати його на множині альтернатив

$$A^1 = \{\alpha : \rho_i w_i(\alpha) \leq k_{0(\min)} \quad \forall i \in I, \alpha \in A\} \quad (2.3)$$

Такий узагальнений критерій завжди дає ефективне рішення.

Геометрична ілюстрація ідеї метода на прикладі рівноцінних критеріїв на множині допустимих альтернатив, які описуються співвідношеннями виду $G(\wedge)$ (1.6).

Здесь G – область значень перетворених критеріїв w_1 і w_2 на множині обмежень;

Γ – границя цієї множини;

w_1 і w_2 – визначаються співвідношеннями (1.25);

$\Omega_1 R$ – частина області значень w_1 і w_2 , в який ці критерії приймають значення, що не можуть бути більш ніж $k_0(j)$.

Оскільки критерії вважаються рівноцінними, тобто $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$, то напрямлення R , що задається цією перевагою, співпадає з напрямленням бісектриси координатного кута w_1 і w_2 .

Рішення, яке дає мінімальні відносні відхилення від оптимальних значень, знаходяться в області G на проміні $OR \rightarrow$.

Компромісне рішення, яке належить множині ефективних альтернатив, тобто забезпечує мінімальні значення цим відхиленням, буде в точці C^* , яка знаходиться на перетині променя $OR \rightarrow$ з областю ефективних точок. Щоб знайти цю точку необхідно визначити послідовно таке найменше $k_0(I)$, при якому ще порожній перетин G і $\Omega_1 R$.

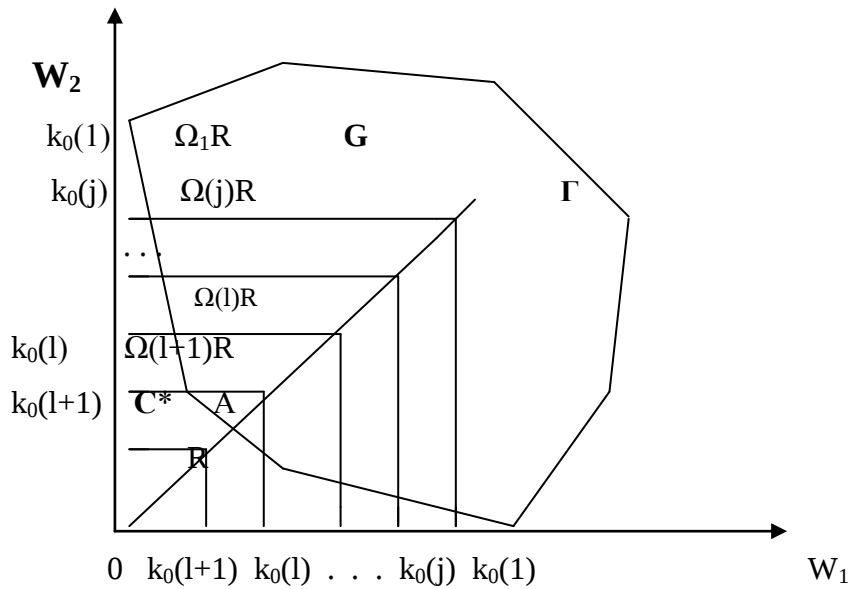


Рис. 2.1. Множина ефективних альтернатив.

Якщо вектор $\mathbf{OR} \rightarrow$ не перетинається з областю ефективних точок, то в область $\Omega_1 \mathbf{R}$, яка відповідає мінімальному значенню $k_0(1)$, при якому система (2.1) ще сумісна, існує деяка множина точок, серед яких обов'язково є ефективна точка, тобто найближча до променя $\mathbf{R}$.

$$\rho_i w_i(\alpha^k) = k_0$$

Одним з методів знаходження компромісних рішень є метод, оснований на мінімізації узагальненого критерію вигляду

$$F(\alpha) = \max_{i \in I} \rho_i w_i(\alpha), \quad (2.4)$$

де $w_i(\alpha)$ описується співвідношеннями (1.25).

Цей метод дозволяє знайти таку альтернативу $\alpha \in A$, для якої або виконується система рівностей

$$\rho_i w_i(\alpha^k) \leq k_0.$$

для всіх $i \in I$ і мінімального значення параметра k_0 , або для деяких номерів рівняння не виконується.

$$\rho_i w_i(\alpha^k) = k_0$$

Якщо при цьому така альтернатива єдина, то це і є компромісне рішення.

Цей метод, який оснований на пошуку допустимих альтернатив системи нерівностей (1.30) при мінімальному значенні параметра k_0 можна розглядати як метод рішення задачі

$$\min_{\alpha \in A} \{F(\alpha)\} = \min_{\alpha \in A} \max_{i \in I} \rho_i w_i(\alpha).$$

Якщо рішення задачі (2.4) не єдине, то для вибору компромісний альтернативи необхідно ввести додатковий критерій виду (2.2) (Метод Гермейєра).

Метод пошуку компромісний альтернативи, який оснований на мінімізації лінійного узагальненого критерію виду (2.2) не дозволяє знайти рішення. Цей підхід суттєво залежить від виду перетворення $w_i(\alpha)$, тому що різний порядок величини $w_i(\alpha)$ призводить до зміни переваги, тому що доданки в (30) можуть стати порівнянні при маленьких значеннях ρ_i .

Якщо критерії $f_i(\alpha)$ лінійні і множина допустимих альтернатив A є опуклим багатокутником, який описується співвідношеннями (1.6), то рішення, що мінімізує критерій (2.2) на множині обмежень (1.6), буде знаходитись на вершині багатокутника. В той же час шукане компромісне рішення буде знаходитись на ребрі.

Тобто, якщо в якості монотонних перетворень функцій цілі множини f обрати співвідношення (1.24), то задачу (2.1) – (2.2) можна сформулювати таким чином.

Знайти рішення задачі параметричного програмування відносно параметра k_0 при заданому векторі переваг ρ :

$$\min_{\alpha} \{ F(\alpha) = \sum_{i \in I_1} \rho_i \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_{i(\min)}} + \sum_{i \in I_2} \rho_i \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0} \} \quad (2.5)$$

З врахування обмежень

$$\alpha \in A,$$

$$f_i(\alpha) \geq f_i^* = f_i^0 - \frac{k_0}{\rho_i} (f_i^0 - f_{i(\min)}^0) \quad \forall i \in I_1 \quad (2.6)$$

$$f_i(\alpha) \leq f_i^* = f_i^0 + \frac{k_0}{\rho_i} (f_{i(\max)}^0 - f_i^0) \quad \forall i \in I_2$$

Рішення задачі (2.5)–(2.6) при мінімально можливому значенні параметра $k_0 \in (0; 1/M)$ і визначить шукану компромісну альтернативу [3].

2.2 Метод обмежень в багатокритеріальній задачі лінійного програмування

Задача лінійного програмування є математичною моделлю великої кількості економічних задач і задач проектування, які зустрічаються в практиці. Для рішення цих задач використовуються різні варіанти симплекс-методу [3].

Але в багатьох практичних задач вибір рішення за одним критерієм якості не є вірним, тому що потрібно врахувати декілька критеріїв якості. Це призводить до необхідності рішення багатокритеріальних задач лінійного програмування.

Нехай задана множина лінійних функцій цілей $f = \{ f_i(u) \} \quad i \in I$, де

$$f_i(u) = c_i u = c_{1i} u_1 + c_{2i} u_2 + \dots + c_{ji} u_j + \dots + c_{ni} u_n \quad (2.7)$$

де m перших функцій цілі максимізуються, а $(M - m)$ – мінімізуються.

На вектор управляючих дій $u = \{u_j\} \quad j = 1, \dots, n$ накладені лінійні обмеження виду (1.6), тобто

$$Au \leq b, \quad u_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Для рішення цієї задачі використовується метод обмежень. Перетворення, які приводять критерії до безрозмірного виду. В даному випадку для функцій цілі, що максимізуються

$$w_i(f_i(u)) = \frac{c_i^0 u_i^0 - c_i^1 u_i}{c_i^1 u_i^0 - c_i^1 u_{i(\min)}^0} \quad \forall i \in I_1, \quad (2.9)$$

А для функцій цілі, що мінімізуються :

$$w_i(f_i(u)) = \frac{c^i u - c^i u_i^0}{c^i u_{i(\max)} - c^i u_i^0} \quad \forall i \in I_2, \quad (2.10)$$

де u_{i0} - рішення, яке належить множині обмежень (2.8), яке оптимізує i -у функцію цілі, $u_{i(\max)}$, $u_{i(\min)}$ – рішення, які забезпечують найгірші значення відповідно до критеріїв, які максимізуються або мінімізуються на заданій множині обмежень (2.8).

Компромісним рішенням багатокритеріальної задачі оптимізації буде таке ефективне рішення, для якого **зважені відносні втрати** будуть однакові і мінімальні, тобто

$$\rho_1 w_1(u) = \rho_2 w_2(u) = \rho_3 w_3(u) = \dots = \rho_M w_M(u) = k_{0(\min)}$$

Відповідно до методу обмежень шукане компромісне рішення може бути знайдено з рішення системи лінійних нерівностей

$$\begin{aligned} c^i u &\geq c^i u_i^0 - \frac{k_0}{\rho_i} (c^i u_i^0 - c^i u_{i(\min)}) \quad \forall i \in I_1, \\ c^i u &\geq c^i u_i^0 + \frac{k_0}{\rho_i} (c^i u_{i(\max)} - c^i u_i^0) \quad \forall i \in I_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$Au \leq b, \quad u_i \geq 0 \quad \forall i \in I.$$

Рішення системи (2.11) еквівалентне рішення наступної задачі лінійного програмування.

$$\min_u \{ k_0 = u_{n+1} \} \quad (2.12)$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} d_{11} u_1 + d_{12} u_2 + d_{13} u_3 + \dots + d_{1,n+1} u_{n+1} + d_1 &\geq 0 \\ d_{21} u_1 + d_{22} u_2 + d_{23} u_3 + \dots + d_{2,n+1} u_{n+1} + d_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} d_{M1} u_1 + d_{M2} u_2 + d_{M3} u_3 + \dots + d_{M,n+1} u_{n+1} + d_M &\geq 0 \\ a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 + \dots + a_{1n} u_n - b_1 &\leq 0, \\ a_{p1} u_1 + a_{p2} u_2 + a_{p3} u_3 + \dots + a_{pn} u_n - b_p &\leq 0, \\ u_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.14)$$

де

$$d_{ij} = \begin{cases} \rho_i c_j^i & \forall j=1, \dots, n, \quad \forall i \in I_1 \\ -\rho_i c_j^i & \forall j=1, \dots, n, \quad \forall i \in I_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$d_{i,n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j^i (u_{ij}^0 - u_{ij(\min)}), & \forall i \in I_1 \\ \sum_{j=1}^n c_j^i (u_{ij(\max)} - u_{ij}^0) & \forall i \in I_2 \end{cases} \quad (2.16)$$

$$d_i = \begin{cases} -\rho_i \sum_{j=1}^n c_j^i u_{ij}^0, & \forall i \in I_1 \\ \rho_i \sum_{j=1}^n c_j^i u_{ij}^0 & \forall i \in I_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3 Методи надання переваг на множині функцій цілей

Для вибору єдиного рішення в задачі прийняття складного рішення необхідно задати вагові коефіцієнти $\rho \subset P$, які задовольняють співвідношенням (2.18)

$$\rho = \{\rho_i\} = \{\rho_i : \rho_i > 0, \quad \forall i \in I, \quad \sum_{i \in I} \rho_i = 1\} \quad (2.18)$$

Існує декілька засобів визначення цих переваг :

- ранжирування,
- надання балів,
- часткове парне порівняння,
- повне порівняння,
- послідовне порівняння.

За допомогою цих засобів проводиться порівняння на надійність і ефективність в відношенні втрат часу на збір і узагальненні висновки експертів в тих самих ситуаціях прийняття рішень.

Найбільш ефективними в проведених дослідженнях виявилися методи ранжирування і надання балів.

Розглянемо їх більш детально.

Нехай експертиза проводиться групою експертів з L експертів, які є кваліфікованими спеціалістами в області де приймається рішення.

1. Метод ранжирування заснований на том, що кожний експерт розміщує функції цілі множини f в порядку їх важливості. При цьому цифрою 1 позначаються найбільш важливі для даної ситуації функції цілей, цифрою 2 менш важливі, тощо. Ці ранги перетворюються таким чином, що ранг 1 отримує оцінку M ; ранг 2 – $(M-1)$, тощо. Рангу M надається оцінка 1, де M – кількість функцій цілей.

Знаючи перетворений ранг i_{jr} j – го критерію у r - го експерту, можна знайти вагові коефіцієнти ρ_j $j \in I$ за допомогою співвідношення :

$$\rho_i = \frac{\sum_{r=1}^I i_{jr}^r}{M \sum_{j=1}^I \sum_{r=1}^I i_{jr}^r} \quad \forall j \in I. \quad (2.19)$$

2. Метод надання балів базується на тому, що експерти оцінюють важливість кожної функції цілей по шкалі 0 – 10. При цьому їм дозволяється оцінювання важливості дробовими величинами або надавати декільком функцій цілей однакові значення з обраної шкали.

Якщо відомі балі h_{jr} j - й функції цілі у r – го експерта, вагові коефіцієнти ρ_j , $j \in I$, можна знайти за допомогою співвідношень (2.19), зробив заміну значення i_{jk} j ,

$$\chi_j^r = \frac{h_j^r}{\sum_{j=1}^I h_j^r}, \quad (2.20)$$

Де

$$\chi_j^r$$

називається вагою, підрахованою для j -й функції цілі на основі оцінок r –го експерта.

3. Розглянемо інший підхід до визначення вагових коефіцієнтів ρ_i , який базується на задані кожним експертом допустимих значень функцій цілей.

Кожний експерт задає допустимі відхилення від оптимальних значень по кожній з функцій цілі множини f , щоб обрати рішення в ситуації прийняття складного рішення.

При цьому експерту повідомляють, які значення приймають функції цілі, з врахуванням яких обирається рішення на заданій множині допустимих альтернатив A , тобто вказується діапазон зміни

$$[f_{i(\min)}, f_i^0] \quad \forall i \in I_1 \quad \text{і} \quad [f_i^0, f_{i(\max)}] \quad \forall i \in I_2.$$

Нехай r -й експерт вказав множину допустимих значень

$$f^{*r} = \{ f_i^{*(r)} \} \quad (i \in I).$$

Для визначення ρ_{ir} необхідно врахувати, що при виборі компромісного рішення використовується перетворення (1.25)

$$w_i(f_i(\alpha)) = \begin{cases} \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_{i(\min)}} & \forall i \in I_1, \\ \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0} & \forall i \in I_2. \end{cases}$$

Тоді для кожної функції цілі обчислюються компоненти точки

$$\begin{aligned} w^{*(r)} &= \{ w_i^{*(r)} \} \quad (i \in I), \\ w_{i1}^{*(r)} &= \frac{f_i^0 - f_i^{*(r)}}{f_i^0 - f_{i(\min)}} \quad , \quad \forall i \in I_1, \\ w_i^{*(r)} &= \frac{f_i^{*(r)} - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0} \quad , \quad \forall i \in I_2. \end{aligned}$$

Якщо $i \in I$ значення $w_i^{*(r)}$ однакові, то обрана r -м експертом точка $w^{*(r)}$ знаходиться на вектор $i \in P^+$ з компонентами $\rho_{ir} = 1/M$ $i \in I$.

Оскільки вектор $p \in P^+$ оцінює переваги функцій цілі в кількісній шкалі, то можна вважати, що r -й експерт вважає функції цілей множини f рівноцінними. Якщо $w_i^{*(r)}$ різні, то точка $w^{*(r)}$ повинна задовольняти співвідношенням (1.29)

$$\rho_i w_i(\alpha) = k_0 \quad i \in I \quad (1.29)$$

Вагові коефіцієнти ρ_{ir} можуть бути знайдені з співвідношення

$$\rho_i^r = \frac{\prod_{j \in I, j \neq i} w_j^{*(r)}}{\sum_{q \in I} \prod_{j \in I, j \neq q} w_j^{*(r)}} \quad (2.21)$$

Визначив вектор вагових коефіцієнтів ρ_r для всіх $r = 1, \dots, L$, вектор переваг $\rho \in P^+$ для заданої множини функцій цілей f можна знайти з співвідношення (1.49), визначив

$$i_j^r = \rho_j^r \quad \forall j \in I, \quad \forall r = 1, \dots, l.$$

Відмітимо, що операцію визначення середнього значення при підрахунку вагових коефіцієнтів, можна провести одразу після надання експертами множини допустимих значень $f^{*(r)}$, тобто знайти множину [3]

$$f^* = \left\{ f_i^* = \frac{\sum_{i=1}^l f_i^{*(r)}}{l} \right\} \quad \forall i \in I.$$

Знаходження вектору переваг $\rho \in P^+$ в цьому випадку виконується так само як і для випадку обробки інформації від r -го експерту.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке ефективна альтернатива?
2. Основні поняття в задачах прийняття рішення.
3. Властивості ефективних альтернатив.
4. Визначення вагових коефіцієнтів ρ_i .
5. Визначення середнього значення при підрахунку вагових коефіцієнтів.
6. Методи ранжирування функцій цілі.
7. Засоби визначення переваг на множині функцій цілі.

Література

1. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем: монография / М. Месарович, Д. Мако, И. Такаха; пер. англ. под ред. И.Ф. Шахнова – М.: изд-во «Мир», 2003. – 387 с.

2. Михалевич, В.С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем: монография / В.С. Михалевич, В. Л. Волкович – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2002. – 348 с.

3. Ієрархічні системи управління і їх особливості

3.1 Головні особливості ієрархічних систем

Вивчення процесів управління великими виробництвами, енергетичними комплексами, а також деякими економічними, біологічними системами призвело до виникнення поняття складної системи управління з заданою ієрархічною структурою [1,2].

Такі системи складаються з окремих підсистем, кожна з яких вирішує власну задачу управління, що розв'язує 3 задачі:

- отримання інформації про об'єкт, який управляється ;
- перетворення її з ціллю синтезу закону управління;
- передача закону управління на об'єкт.

Розкладання складного об'єкту управління на підсистеми стає необхідним, тому що він має велику розмірність і розв'язок описаних задач управління набуває великої складності.

Структура взаємодії підсистем, які входять до складу складної системи, може бути різною, але в більшості випадків є ієрархічною. Необхідність побудови системи управління складним об'єктом за ієрархічним принципом завжди потребує проведення додаткових обстежень і досліджень, тому що для інших – без введення такої структури системи управління не може функціонувати.

Можна навести багато прикладів системи, в яких ієрархічна структура системи управління склалась в результаті самоорганізації :

Автоматизовані системи управління підприємством, повітряним рухом, системи управління економікою країни тощо.

Головні особливості ієрархічних систем в порівнянні з централізованими [3]:

- 1 - наявність пріоритету при прийнятті рішення між підсистемами, які входять до складу складної системи, що досліджується;
- 2 - розташування підсистем з власними локальними властивостями на рівнях ієрархії у відповідності з пріоритетом рішень, що приймаються. Підсистеми одного рівня по відношенню один до одного мають однакові пріоритети при виборі рішення;
- 3 - рішення кожної з підсистем, крім підсистем першого рівня, двох задач за локальними критеріями оптимальності: задачі самоуправління і задачі координації підпорядкованих їй підсистем нижнього рівня;
- 4 - створення зв'язків підсистем нижнього рівня з підсистемами верхніх по відношенню до них рівнів шляхом передачі попереднього узагальної (агрегованої) інформації;

- 5 - створення зв'язків підсистем верхніх рівнів з підпорядкованими їм підсистемами нижнього рівня через управляючі дії, які їм надають підсистеми верхнього рівня;
- 6 - побудова моделі задачі координації в кожній з підсистем першого рівня за даними узагальненої інформації про поведінку всієї сукупності підпорядкованих їй систем нижнього рівня;
- 7 - формування параметрів задачі координації при рішенні задач самоуправління в кожній з підсистем;
- 8 - існування тактів при рішенні задачі самоуправління і координації в кожній з підсистем і пов'язаних з цим тактом видачі узагальненої інформації і управляючих дій;
- 9 - різниця в часі рішення задачі на різних рівнях ієрархії;
- 10 - можливість прийняття рішення в підсистемах нижчих рівнів в міжтактовий час;
- 11 - на кожному підсистемі впливають як локальні внутрішні так само і локальні зовнішні дії, які пов'язані зі змінною узагальненої інформації на нижчих рівнях.

3.2 Різниця між ієрархічними системами управління і централізованими

Різниця між ієрархічними системами управління і централізованими полягає в тому, що для централізованих систем управління існує єдиний критерій оптимальності для всієї системи в цілому. Для ієрархічних систем кожна з підсистем, яка входить в систему управління, має свої локальні критерії оптимальності [3].

В цьому випадку окремі підсистеми можуть не працювати в оптимальному режимі, а вся складна система управління при досягненні цілі функціонування виконувати задачу найкращим чином. Тобто локальні цілі підсистем не обов'язково погоджені з ціллю всієї системи. Це перша різниця між централізованими і ієрархічними системами.

Друга різниця полягає в тому, що для централізованих систем управління вибирається для всієї системи одночасно (на одному і тому ж проміжку часу), а для ієрархічних систем вибір управляючих дій в підсистемах здійснюється послідовно (кожна підсистема має можливість автономного функціонування).

Ці особливості ієрархічних систем додають труднощі розв'язання задачі управління, що пов'язані з складністю аналізу поведінки і управління такими системами.

Ієрархічна структура знаходить широке використання при побудові систем управління об'єктами різного характеру тому що вона має багато переваг над іншими типами структур:

1. Достатньо складні системи, які складаються з об'єктів різного типу, великої розмірності, різної інерційності не можуть функціонувати без розподілення функцій прийняття рішень – тобто без введення ієрархічної структури [1- 2].

2. В ієрархічних системах дія зовнішніх перешкод на окремі підсистеми знищується самостійно підсистемою і може не заважати іншим підсистемам. Це призводить до кращої адаптації системи в цілому і дозволяє скоротити витрати часу і коштів на управління.

3. Ієрархічні системи мають кращу надійність, тому вихід з ладу системи управління окремої підсистеми, за звичай, не призводить до виходу з ладу системи загалом.

4. Проміжок часу відпрацювання управляючої дії в ієрархічних системах враховує інерційність різних підсистем управління. Це призводить до різної періодичності при виборі управляючих дій на різних рівнях і к автономному функціонуванню підсистем на деяких проміжках часу.

5. Ієрархічна структура управління дозволяє опис підсистем з врахуванням різних аспектів:

- фізичних;
- хімічних;
- економічних тощо.

Тобто дозволяється їх опис на різних рівнях абстракції. Централізована система управління потребує щоб всі підсистеми, які входять до її складу, були описані однією мовою, тобто з врахування тих самих аспектів.

3.3 Опис ієрархічної системи управління з наданою структурою

Розглянемо n -рівневу ієрархічну систему управління з наданою структурою, яку можна зобразити як дерево з коренем [3].

Встановимо в відповідність кореню дерева підсистему n -го рівня, верхівкам дерева, які відстоять від кореня дерева на одне ребро – підсистеми $(n-1)$ -го рівня, на 2 ребра - підсистеми $(n-2)$ – го рівня тощо. Таким чином, підсистеми i -го рівня будуть відстояти від підсистеми n -го рівня на $(n-i)$ ребер.

Однак не всі ієрархічні системи мають деревовидну структуру. Існують ієрархічні системи, в яких підсистеми поряд з вертикальними зв'язками, мають горизонтальні зв'язки, які визначають їх функціональні взаємозв'язки.

Таки системи можуть бути представлені графом з циклами.

Ієрархічні системи без горизонтальних зв'язків називають системами першого типу, а зі зв'язками – системами другого типу.

Розглянемо ці системи.

Множини підсистем i -го рівня поставило в відповідність деяку множину чисел натурального ряду, яке назовемо множиною індексів i -го рівня:

$I_i = \{ 1, 2, \dots, M_i \}$ $i = 1, 2, \dots, n$, де M_i – кількість підсистем в i -му рівні.

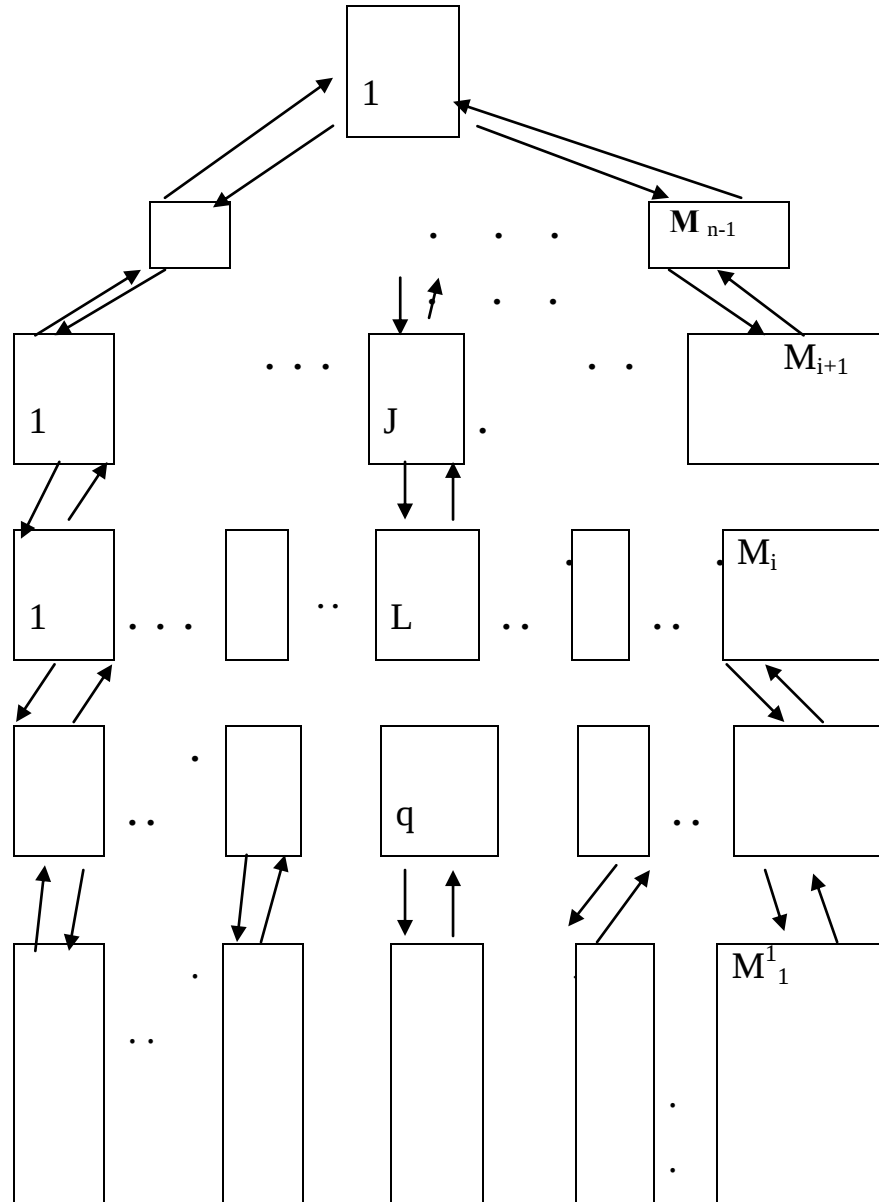


Рис. 3.1. Структура ієрархічної системи управління.

Підпорядкованість підсистем i -го рівня відповідним підсистемам $(i+1)$ -го рівня продовжує розбиття множини індексів I_i на сукупність підмножин I_{ij} для всіх j , що належать множині I_{i+1} з кількістю елементів m_{ij} , які задовольняють наступним умовам:

- 1). $I_i^j \subset I_i$;
- 2). $I_i^j \cap I_i^k = 0, j \neq k \quad (j, k \in I_{i+1})$;
- 3). $\bigcup_{j \in I_{i+1}} I_i^j = I_i$.

Звідки

$$M_i = \sum_{j \in I_{i+1}} m_i^j.$$

Для i -ї підсистем i -го рівня введемо наступні визначення :

- X_{ij} – множина векторів стану $x_{ij} = \{ x_{ij\lambda} \}$ ($\lambda = 1, \dots, \lambda_{ij}$) розмірності λ_{ij} ;

- Y_{ij} – множина векторів локальних вихідних змінних $y_{ij} = \{ y_{ij\alpha} \}$ ($\alpha = 1, \dots, \alpha_{ij}$) розмірності α_{ij} , по яким здійснюється управління в цій підсистемі;

- Z_{ij} – множина векторів узагальнених вихідних змінних

$$Z_{il}^j = \{ Z_{il}^{j\beta} \} \quad (j \in I_{i+1}, \beta = 1, \dots, \beta_{il}^j)$$

розмірності β_{il}^j , що видаються в j -ю підсистему $(i+1)$ – рівня;

- Z_{i-1l} – множина векторів узагальнених вихідних змінних

$$Z_{i-1}^l = \{ Z_{i-1,r}^l \} = \{ Z_{i-1,r}^{l\beta} \} \quad (r \in I_{i-1}^l, \beta = 1, \dots, \beta_{i-1,r}^l),$$

які надходять до i -ї підсистеми від підпорядкованих їй підсистем $(i-1)$ – го рівня, (розмірність вектора Z_{i-1l} дорівнює

$$\beta_{i-1}^l = \sum_{r \in I_{i-1}^l} \beta_{i-1,r}^l), \quad Z_{i-1}^l = \bigcup_{r \in I_{i-1}^l} Z_{i-1,r}^l;$$

- U_{il} – множина векторів самоуправління $u_{il} = \{ u_{il\delta} \}$ ($\delta = 1, \dots, \delta_{il}$) розмірності δ_{il} ;

- $U_{i+1,jl}$ – множина векторів управління $u_{i+1,j} = \{ u_{i+1,j\gamma} \}$ ($\gamma = 1, \dots, \gamma_{i+1,jl}$) розмірності $\gamma_{i+1,jl}$, за допомогою якого j – я підсистема $(i+1)$ рівня здійснює управління j -ї підсистеми i -го рівня.

- F_{il} – множина векторів зовнішніх дій $f_{il} = \{ f_{il\omega} \}$, ($\omega = 1, \dots, \omega_{il}$) розмірності ω_{il} , які діють на підсистемі.

Кожна підсистема ієрархічної системи управління, що розглядається, розв'язує дві задачі:

- задачу самоуправління;
- задачу управління підпорядкованими підсистемами нижчого рівня, тобто задачу координації.

Тому 1-ю підсистему i -го рівня можна представити у вигляді двох блоків:

- блока самоуправління;
- блока координації підпорядкованими підсистемами нижчого рівня.

Зв'язок між підсистемами різних рівнів і внутрішнього рівня може здійснюватись через інформаційні і матеріально-енергетичні потоки. В залежності від вигляду зв'язків підсистем можуть бути різні описи.

В залежності від зв'язків між підсистемами різних рівнів і в середині рівня, існуючі ієрархічні системи управління (ІСУ). Можна розбити на наступні етапи:

1. ІСУ з інформаційними зв'язками.
2. ІСУ з матеріально-енергетичними зв'язками.
3. ІСУ з інформаційними зв'язками з верхнім рівнем і матеріально-енергетичними зв'язками з нижчим рівнем і в середині рівня.
4. ІСУ з інформаційними зв'язками з верхнім рівнем і нижчим рівнем і матеріально-енергетичними зв'язками в середині рівня.
5. ІСУ з матеріально-енергетичними зв'язками з верхнім рівнем і інформаційними зв'язками з нижчим рівнем і в середині рівня.
6. ІСУ з комбінованими зв'язками між верхнім рівнем і в середині рівня, як інформаційними так і матеріально-енергетичними.

Крім того, в залежності від типу відображення

$$\Psi_{il} : X_{il} \times U_{il}^l \times F_{il} \rightarrow Y_{il} ;$$

яке описує об'єкт управління, розрізняють динамічну і статистичну поведінку об'єкта.

Під статистичною розуміють таку поведінку підсистеми, при якій вектор стану і обурення, що на неї діють, залишаються незмінними на протязі проміжку часу, які можуть бути порівняні зі сталими часу системи. Це припущення дозволяє використовувати методи прямого регулювання і здійснювати статистичну оптимізацію.

Динамічна поведінка підсистеми пов'язана зі зміною вектора стану і зовнішніх обурень за невеликі проміжки часу. При обиранні управлінь в таких підсистемах здійснюється оптимізація при диференціальних зв'язках.

Ієрархічні системи управління можуть відрізнятися одна від одної сполученнями зв'язків між підсистемами і складом підсистем в залежності від їх поведінки.

3.4 Координація в ієрархічних системах управління

Розглянемо n -рівневу систему управління 1 типу, яка описується співвідношеннями виду:

$$x_{il}(k) = X_{il}(z_{i-1}^l(k)), \quad (3.1)$$

$$y_{il}(k) = Y_{il}(x_{il}(k), u_{il}^l(k), u_{i+1,l}^l(k), f_{il}(k)), \quad (3.2)$$

$$z_{il}^j(k) = Z_{il}^j(y_{il}(k)) \quad (j \in I_{i+1}) \quad (3.3)$$

де k - довільний номер періоду часу T ,

X_{il}, Y_{il}, Z_{il} - векторні функції розмірності $\lambda_{il}, \alpha_{il}, \beta_{il}$, компонентами яких є опуклі неперервні диференційовані функції всіх змінних.

Критерії оптимальності і обмеження мають вигляд:

$$\Psi_{il} = \Psi_{il}(y_{il}(k), u_{il}^l(k)), \quad (3.4)$$

$$F_{il} = F_{il}(x_{il}(k), y_{il}(k), u_{il}^l(k)), \quad (3.5)$$

де Ψ_{il} і F_{il} - опуклі функції в кожній підсистемі, починаючи з підсистеми n -го рівня, тобто при рішенні оптимальних задач для всього дерева цілей. Однак при цьому підсистеми нижчих рівнів можуть працювати в небажаних для них режимах.

Наприклад, 1-я підсистема i -го рівня визначає локальну управляючу дію u_{il} , для рішення задачі при заданих управляючих діях $u_{i+1,jl}$ може не досягати глобального оптимуму за заданим критерієм (3.4)-(3.5).

Це призводить для необхідності визначення принципів взаємодій підсистем між собою.

Математичне формулювання взаємодій підсистем для ієрархічної системи, що розглядається, можна описати наступним чином.

Нехай рішення задачі

$$\min_{u_{i+1,l}^l, u_{i,l}^l} \Psi_{il}(y_{il}(k), u_{il}^l(k)),$$

З врахуванням обмежень на k -м такті дозволяє знайти управляючу дію для l -ї підсистеми i -го рівня, які поступають до неї від j -ї підсистеми $(i+1)$ -го рівня.

В залежності від взаємодії між підсистемами можна розглядати різні види координації:

1. Координація відносно задачі, яка вирішується в підсистемі верхнього рівня.
2. Координація відносно задач, які розв'язуються в кожній з підсистем ієрархічної системи з n рівнями, що розглядається.
3. Координація відносно компромісного значення цільових функцій підсистем ієрархічної системи з n рівнями, що розглядається.

3.5 Координація дворівневої ієрархічної системи управління

Розглянемо дворівневої ієрархічної системи управління, яка складається з однієї підсистеми верхнього і M підсистем нижнього рівня. Множину індексів кожного рівня позначимо відповідно через $I_2 = \{1\}$ і $I_1 = \{1, 2, \dots, M\}$. Кожна з підсистем дворівневої системи, що розглядається, описується співвідношеннями виду:

- відображенням Y_1 , яке описує об'єкт управління
- $$\Omega_1 : X_1 \times U_1 \times F_1 \times S_1 \rightarrow Y_1; \quad (3.6)$$

- відображенням Ψ_1 , які описують критерій, на основі якого підсистема визначає управляючі дії U_1 :
- $$\Psi_1 : U_1 \times Y_1 \rightarrow V_1; \quad (3.7)$$

- відображенням Z_1 , які описують узагальнену інформацію, що поступає в підсистему верхнього рівня :

$$\Xi_1 : Y_1 \rightarrow Z_1; \quad (3.8)$$

- проекційним відображенням Π_1 , які описують вектор зв'язків, що впливають на g -ю підсистему:

$$\Pi_1 : Y_1 \rightarrow S_{1g}; \quad (3.9)$$

- відображенням Γ_1 , яке характеризує обмеження на вектори вихідних змінних:

$$\Gamma_1 : Y_1 \rightarrow G_1; \quad (3.10)$$

- відображенням Π_1 , яке характеризує обмеження на локальні управляючі впливи:

$$\Pi_1 : U_1 \rightarrow H_1. \quad (3.11)$$

Функціонування ієрархічної системи здійснюється за тактами, періоди яких визначаються наступним чином: T_1 - період рішення задачі самоуправління (3.6 – 3.11).

Період T_1 рішення задачі самоуправління в підсистемах нижчого рівня визначається або зміною зовнішнього вектора f_i або зміною управляючих дій верхнього рівня u_i .

На основі інформації, яка отримується від підсистем верхнього рівня, перевіряються обмеження (3.10) – (3.11) і підраховується значення критерію (3.7) і управляючих дій $u = \{u_i\}$ ($i \in I_1$), які визначені на

попередньому такті рішення задачі управління підпорядкованими підсистемами нижнього рівня.

Якщо обмеження порушуються або значення критерію відхиляються від потрібного, то знов необхідно розв'язувати задачу для підсистеми верхнього рівня, що і визначає величину періоду T .

В ієрархічній системі, що розглядається, між вказаними періодами існують наступні співвідношення $T \geq T_l$ для всіх $l \in I_1$.

Розглянемо питання координації дворівневої ієрархічної системи:

1) Координація відносно задачі, яка розв'язується в підсистемі верхнього рівня, складається з того, що при рішенні задачі самоуправління за період T_l значення узагальненої інформації повинно належати деякій множині $\dot{O}(Z_l)$, тобто

$$Z_l(k_l) \in \dot{O}(Z_l) \quad (k_l = 1, 2, \dots, c_l; l \in I_1), \quad (3.12)$$

де $\dot{O}(Z_l)$ – область зміни значення вихідної узагальненої інформації для l – й підсистеми нижнього рівня. При цьому значення критерію для підсистеми верхнього рівня буде дорівнювати глобальному оптимуму $F(0)$. Це означає, що існують управляючі дії $u_l(k_l)$ ($k_l = 1, \dots, c_l, l \in I_1$), при яких нема конфлікту між підсистемами нижнього рівня.

2) Координація відносно задач, які розв'язуються в кожній з підсистем в дворівневій ієрархічній системі, складається з того, що на тактах k_l ($k_l = 1, \dots, c_l, l \in I_1$) рішення задачі самоуправління всі підсистеми нижнього рівня досягають свого глобального оптимуму, а для узагальненої інформації повинні виконуватись умови (10.7).

Для координації системи відносно задач, які розв'язуються в кожній з підсистем достатньо, щоб для всіх підсистем нижнього рівня на кожному такті k_l існували рішення задач виду

$$\Psi_{l(0)} = \max_{u_l(k), u^l(k)} \Psi_i(u_l(k), u^l(k), y_i(k)) \quad (3.13)$$

з врахуванням співвідношень (3.6)-(3.12).

3) Координація відносно компромісного рішення цільових функцій підсистем дворівневій ієрархічній системі.

В ієрархічних системах першого типу виникає конфлікт між підсистемами різних рівнів. Якщо конфлікт носить неантагоністичний характер (підсистеми погоджуються на компроміс), то вибір управлінської дії в дворівневій ієрархічній системі зводиться до прийняття рішення на множині критеріїв, яка сформована на основі критеріїв окремих підсистем, тобто к вибору компромісного рішення.

Вибір компромісного рішення в таких задачах здійснюється при доповненні задачі новою інформацією. В якості такої інформації використовується введення нових функцій, що дозволяє порівнювати функції цілей різних розмірностей для кожної підсистеми, і завдання переваг на множині цільових функцій. Такими функціями є:

$$w_0 = \frac{F - F_{(0)}}{F_{(\max)} - F_{(0)}} , \quad w_l(\Psi_l) = \frac{\Psi_l - \Psi_{l(0)}}{\Psi_{l(\max)} - \Psi_{l(0)}} , \quad (3.14)$$

якщо критерії мінімізуються, та

$$w_0(F) = \frac{F_{(0)} - F}{F_{(0)} - F_{(\min)}} , \quad w_l(\Psi_l) = \frac{\Psi_{l(0)} - \Psi_l}{\Psi_{l(0)} - \Psi_{l(\min)}} , \quad (3.15)$$

якщо критерії максимізуються,

де $F_{(\max)}$, $\Psi_{l(\max)}$ – найбільші значення критеріїв, що мінімізуються, на всієї множині обмежень (3.10) - (3.11).

Аналогічно $F_{(\min)}$, $\Psi_{l(\min)}$ – найменше значення критеріїв, що максимізуються, при тих самих обмеженнях.

Переваги на множині критеріїв будемо задавати за допомогою метода експертних оцінок ваговими коефіцієнтами ρ_i , які задовольняють співвідношенням

$$\sum_{i=0}^M \rho_i = 1, \quad \rho_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, M},$$

Де ρ_0 – ваговий коефіцієнт для критерію підсистеми верхнього рівня, а ρ_i для всіх $1 \in I_1$ - вагові коефіцієнти для критеріїв підсистем нижнього рівня.

Під компромісними управляючими діями $u_l(k)$, $u(k)_l$ ($l \in I_1$) ієрархічної системи, що розглядається, будемо розуміти такі управлінські дії, які належать множині ефективних рішень для прийнятих критеріїв і заданих обмежень (3.10) - (3.11) і відповідають заданим перевагам на множині цих критеріїв в просторі W значень обраних перетворених.

Компромісні управляючі дії в ієрархічній системі, що розглядається, можуть бути знайдені за допомогою метода обмежень.

Введемо деякі позначення для компромісних управляючих дій $u_l(k)$, $u(k)_l$ для всіх $1 \in I_1$: $y_l(k)$ - компромісне значення вихідної змінної l -ї підсистеми;

- $Sl(k)_r$ – компромісне значення зв'язку, який впливає на r -ю підсистему;
- $F(k)$, $\Psi_l(k)$ – компромісні значення критеріїв;

- $\dot{O}(Z_l(k))$ – область, який повинна належати множина значень вихідної узагальної інформації l - й підсистеми нижнього рівня, при якій існують такі управлінські дії для підсистем верхнього рівня, що значення її критерію дорівнює компромісному значенню $F(k)$;
- $\dot{O}(S_l(k))$ - область, який повинна належати множина значень вихідної узагальної інформації l - й підсистеми нижнього рівня, при якій існують такі управлінські дії для підсистем верхнього рівня, що значення її критерію дорівнює компромісному значенню $\Psi_l(k)$.

Будемо вважати дворівневу ієрархічну систему координуємою відносно компромісного значення цільових функцій підсистем, якщо на кожному такті рішення задачі верхнього рівня знайдуться такі управлінські дії

$$u(k)(k) = \{ u_l(k)(k) \} \text{ для всіх } l \in I_1,$$

при яких критерій цієї підсистеми досягне свого компромісного значення $F(k)$, а в кожній підсистемі нижнього рівня на своєму такті k_l рішення локальних задач самоуправління знайдуться управлінські дії $u_l(k)$, при яких її критерій оптимальності досягає свого компромісного значення $\Psi_l(k)$.

Умови координації відносно компромісного значення цільових функцій підсистем для ієрархічної системи першого типу, що розглядається, складається з того, що на тактах $k_l = 1, \dots, c_l$ для всіх $l \in I_1$ рішення задачі самоуправління всі підсистеми нижнього рівня досягають свого компромісного значення. За період T_l значення вихідної узагальної інформації повинно належати області $\dot{O}(Z_l(k))$.

Такими чином, координація системи відносно компромісного значення цільових функцій підсистем, як і в випадку координації відносно задачі, яка розв'язується в підсистемі верхнього рівня, визначається властивостями кожної окремої підсистеми.

При дослідженні n -рівневих ієрархічних систем також виникають питання аналізу взаємодії підсистем з тією різницею, що в таких системах можлива змішана взаємодія, коли частина підсистем взаємодіє для досягнення цілі підсистемами верхнього рівня, а частина - відносно компромісних значень.

На практиці для n -рівневих ієрархічних систем найбільший інтерес має функціонування відносно комбінованих управлінських дій.

В кожній підсистемі виникають дві задачі пошуку компромісного управління :

перша – між верхнім рівнем і даною підсистемою,

друга - між підсистемою верхнього і підсистемою нижнього рівня, які їй підпорядковані. В залежності від співвідношень між періодом надходження управлінських дій з верхнього рівня на будь-яку підсистему

і періодом видачі управлінських дій з цієї підсистеми на підпорядкованій їй підсистемі нижнього рівня, виникає декілька варіантів взаємодії підсистем в різних рівнях ієрархічної системи.

Запитання для самоперевірки

1. Основні задачі системного підходу при проектуванні складних систем управління.
2. Особливості постановки задачі багатокритеріальної оптимізації.
3. Координація в ієрархічних системах управління.
4. Координація дворівневої ієрархічної системи управління.
5. Метод експертних оцінок.
6. Компромісні управляючі дії в ієрархічній системі.
7. Координація відносно задачі, яка розв'язується в підсистемі верхнього рівня.
8. Координація відносно задач, які розв'язуються в кожній з підсистем
9. Умови координації відносно компромісного значення цільових функцій

Література

1. Згуровський, М.З. Розвиток інформаційного суспільства в Україні: монографія / М.З. Згуровський, М. К. Родіонов, І. Б. Жилияєв — К.: НТУУ “КПІ”, 2006. - 543 с.
2. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем: монография / М. Месарович, Д. Мако, И. Такаха; пер. англ. под ред. И.Ф. Шахнова — М.: изд-во «Мир», 2003. — 387 с.
3. Михалевич, В.С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем: монография / В.С. Михалевич, В. Л. Волкович — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2002. — 348 с.