

В.А. Бородин

ЗАМЕЧАНИЕ К ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ СХОДИМОСТИ
НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

В работе рассматриваются вопросы сходимости непрерывных дробей с частными знаменателями равными единице,

$$G = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{1 + \frac{a_3}{1 + \dots}}}. \quad (1)$$

Подходящими дробями непрерывной дроби (1) называются дроби

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{1}{1 + a_2}, \frac{A_3}{B_3} = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{1 + a_3}} = \frac{1 + a_3}{1 + a_2 + a_3}, \dots;$$

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{1 + \dots + \frac{1}{1 + a_n}}}. \quad (2)$$

Говорят, что непрерывная дробь (1) сходится если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = G. \quad (3)$$

Ван Влек и Принсгейм [2] доказали, что если все частные числители a_n непрерывной дроби (1) лежат в достаточно малой окрестности произвольной точки a , $a \notin (-\infty; -1/4)$, то непрерывная дробь (1) сходится.

Скотт и Уолл [1] установили важную «параболическую» теорему:

Если все частные числители a_n непрерывной дроби (1) лежат в ограниченной параболической области комплексной плоскости z :

$$a_n \in \left\{ z : |z| - \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}; |z| \leq M < \infty \right\}, M - \text{любое}, \quad (4')$$

тогда непрерывная дробь (1) сходится. Через $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ обозначены действительная и мнимая части числа z .

Бейкер [2] рассмотрел случай когда частные числители лежат в меньшей параболической области, но $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Доказательство «параболической» теоремы Скотта и Уолла основывается на сопоставлении непрерывной дроби некоторого числового ряда, получении фундаментальных неравенств, которые обеспечивают сходимость ряда. Проектирование фундаментальных неравенств на прямую $\operatorname{Im} z = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Re} z$ позволяет «повернуть» параболическую область сходимости.

Теорема. Если для любого $\varphi, -\pi/2 < \varphi < \pi/2$, все частные числители a_n непрерывной дроби

$$G = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{1 + \frac{a_3}{1 + \dots}}} \quad (4)$$

лежат в параболической области

$$\{z : |z| \leq \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) + t\} \quad (2t < \cos \varphi) \quad (5)$$

и, кроме того,

$$|a_n| \leq M + an \quad (a < \cos \varphi - 2t) \quad (6)$$

то непрерывная дробь сходится.

Следствие. Если все частные числители a_n лежат на луче

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad |a_n| \leq M < \infty,$$

то непрерывная дробь (4) сходиться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scott W.T., Wall H. S. A convergence theorem for continued fractions// Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 47. P. 155-172.
2. Baker G.A. jr. Essential of Pade approximations. N.Y.: Acad. Press .1975. P. 1-301.