

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД КРАЙОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВДАВЛЮВАННЯ КВАДРАТНОГО У ПЛАНІ ШТАМПА В БАГАТОЗВ'ЯЗНИЙ ПІВПРОСТІР

Запропонований змішаний метод обчислювання статичних задач теорії пружності для багатозв'язних областей з нескінченно віддаленими межами. Розв'язані задачі про вдавлення квадратного в плані штампу в пружний багатозв'язний півпростір. Проведений порівняльний аналіз отриманого розв'язку з відомими аналітичними виразами. Рис. 3, Пос. 7.

Як відомо, існують аналітичні розв'язки невеликого класу задач про вдавлення штампу в пружний півпростір [1-4], зокрема осесиметричних [5]. В інших випадках застосовують чисельний апарат розв'язання таких задач, наприклад, метод скінченних елементів, метод крайових елементів та ін. [6] Однак, при використанні даних методів півпростір обмежувався скінченим тілом великих розмірів, на межу якого переносилися умови на нескінченності. При цьому, природно, одержували наближений розв'язок поставленої задачі і дуже великі обчислювальні труднощі. Метод крайових елементів дозволяє розв'язувати задачі в нескінченному тілі, обмеженому регулярною поверхнею. Для усунення описаних труднощів пропонується модифікований метод крайових елементів.

Суть методу полягає в наступному. Обмежуємо область поверхнею. Для нової області записуємо інтегральне представлення за методом крайових елементів [7].

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) =$$

$$\int_{\Gamma} u_{ij}(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}(\xi, x)b_j(x)d\Omega(x),$$

де $i, j - 1, 2, 3$ або $1, 2$ для простору і площини відповідно, c_{ij} – ізотропний вектор пружних постійних 4-го порядку, інтеграл у правій частині розуміється в змісті головного значення.

Далі, за схемою методу, будуємо систему алгебраїчних рівнянь. Однак, отримана система має більше невідомих, чим рівнянь, у зв'язку із появою нового контуру. Систему доповнимо рівняннями, що виражають залежність між невідомими нормальними напруженнями під штампом і значенням функції зміщень у будь-якій точці в півпросторі за аналітичним розв'язком другої задачі [1]. Тобто

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \|A_{kj}(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2)\| f(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

де

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -\frac{1}{\mu} \frac{1}{r} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \\
A_{12} &= A_{21} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
A_{31} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3}, \\
A_{22} &= -\frac{1}{\mu} \frac{1}{r} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \\
V^{35} &= \frac{\gamma \hbar \gamma x^5 \gamma x^3}{I \gamma_5 \gamma} - \frac{\gamma(y + \hbar) \gamma x^5 \gamma x^3}{I \gamma_5 \Phi}, \\
A_{13} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3}, \\
A_{23} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad A_{33} = -\frac{2\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{r} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2}, \\
r &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2}, \quad \Phi = x_3 \ln(r + x_3) - r.
\end{aligned}$$

Таким чином, отримана повна система рівнянь, розв'язок якої враховує всі умови, задані в області.

Розглянемо класичну задачу про вдавлення жорсткого штампа із мастилом у пружний ізотропний півпростір із включеннями. Під включенням тут розуміється багатозв'язність області. Математично цей процес являє собою змішану крайову задачу теорії пружності, коли під штампом задане переміщення, а інша частина межі півпростору вільна від зусиль, тобто компоненти тензора напружень дорівнюють нулю. На включенні задані зміщення, які дорівнюють нулю.

При розв'язанні тривимірної задачі пружності методом крайових елементів використовувалися поверхневі елементи прямокутного вигляду та значення невідомих функцій на кожному елементі шукалися як постійні. Для зменшення часу розрахунку задачі використовувалася симетрія щодо площин. При цьому поверхня, що обмежує, стала являти собою паралелепіпед, у якого в перетині по осі z утворюється квадрат.

Проведемо порівняльний аналіз описаного методу для розв'язання задачі про штамп, що вдавлюється в однорідний півпростір, із відомим аналітичним розв'язком. Однак, аналітичний розв'язок відомий для задачі, у якій рівняння тієї частини поверхні штампа, якою він стискається з півпростором являє собою функцію еліптичного виду. В нашій постановці задачі задається переміщення жорсткого штампа, основа якого є поверхня у вигляді квадрата. Тому для порівняння використовувалося аналітичний розв'язок задачі про вдавлення в круговому плані штампа [1]. Радіус кола брався рівний половині сторони квадрата, тобто коло вписували в квадрат. На рис. 1 поданий графік розподілу нормальних напружень під штампом, отриманих аналітичним розв'язком – суцільна лінія, і чисельно-аналітичним – точки.

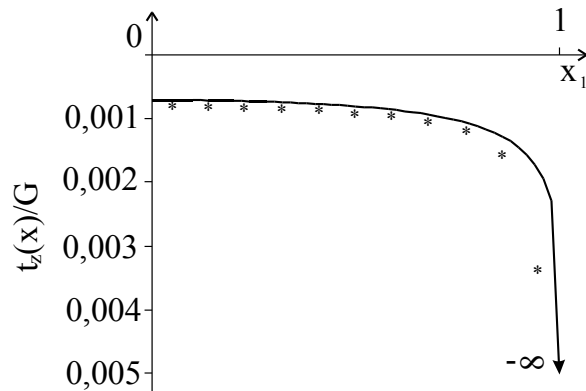


Рис. 1 Розподіл нормальних напруг під квадратним у плані штампом.

На графіку видно гарне наближення отриманого розв'язку нашим модифікованим методом до аналітичного. Таким чином, побудованим змішаним алгоритмом можна ефективно розв'язувати тривимірні задачі для пружного півпростору, при цьому геометрична форма тієї поверхні штампа, якою він стикається із півпростором може бути будь-якою.

Тепер розглянемо розв'язок поставленої вище задачі, коли штамп вдавлюється в неоднорідний

півпростір. Тут, природно, розв'язок теж буде наближеним, що при збільшенні обмежуючого контуру уточнюється. Але, у зв'язку з тим, що обмежуючий контур, завдяки аналітичній залежності частини невідомих на ньому через невідомі на межі півпростору, при побудові розв'язку враховує всі локальні джерела, задані в області. Досліджуючи розв'язки, отриманих за даним методом, для різних обмежуючих контурів, можна сказати, що штучно введений контур повинний знаходитися на відстані, рівній подвоєному діаметру включення, від центру останнього. Подальше збільшення контуру приводить до уточнення розв'язку на величину, меншу відсотка.

На рис. 2 показаний графік розподілу зміщень по Осі z в однорідному півпросторі, в перетині $x_2=0$. На графіку добре видно, що зміщення досягають максимального значення на межі півпростору і на нескінченності прагнуть до нуля.

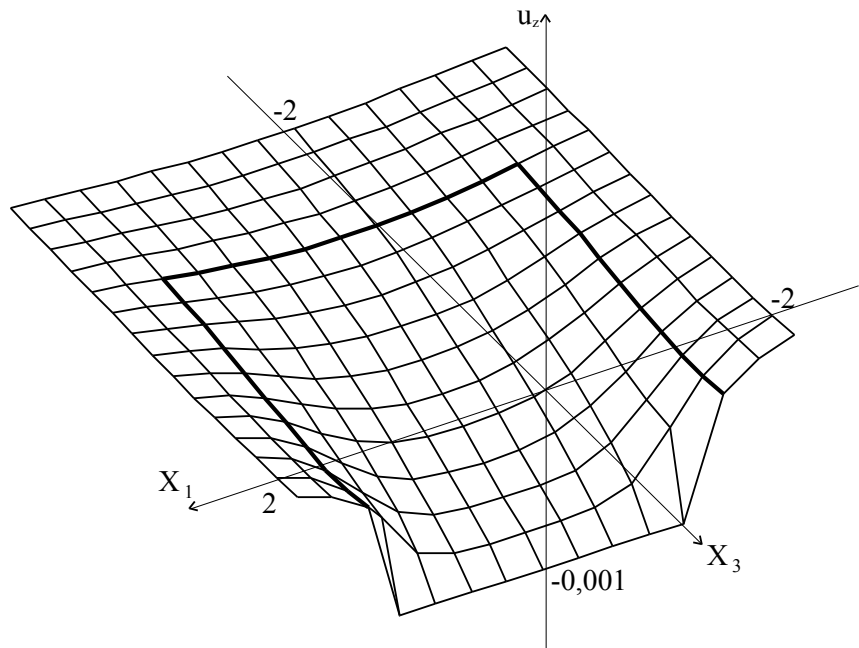


Рис. 2 Розподіл зміщень по осі Oz у пружному півпросторі під дією штампа, у перетині $x_2=0$.

Тепер побудуємо розв'язок описаним вище алгоритмом для такої задачі.

Нехай є багатозв'язний півпростір. Для спрощення побудови розв'язку методом крайових елементів візьмемо включення у вигляді куба. Завдання такої геометричної форми включення відрізняє дане поставлене завдання від багатьох аналогічних, у яких включення має форму, близьку до еліпсоїдальної. На поверхні включення задані нульові зміщення, тобто включення жорстко затиснене. Переміщення під штампом задані такі ж, як і у випадку однорідного півпростору.

На рис. 3 поданий розподіл напружень у півпросторі під дією штампа, у перетині $x_2=0$.

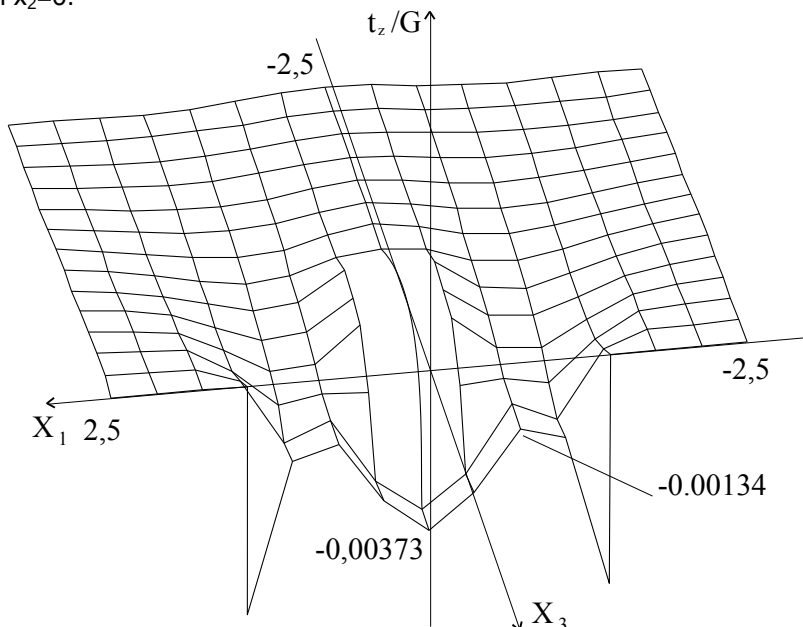


Рис. 3 Розподіл напружень у півпросторі з включенням, що жорстко затиснено, під дією квадратного в плані штампа. Графік поданий у перетині $x_2=0$.

Розподіл нормальних напружень по z у півпросторі являє собою гладку скрізь функцію. Жорстко затиснене включення викликало величезні напруження під штампом. Максимальні зміни відбулися в точці $(0,0,0)$, де по модулю значення збільшилися приблизно в 5 разів. Подальша концентрація напружень у півпросторі змінилася в невеликій області біля включення, відповідно заданим крайовим умовам.

Література

1. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости. – Тбилиси, 1968. – 628 с.
2. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. – М., 1961.
3. Александров В. М. Взаимодействие плоского наклонного кольцевого штампа с упругим полупространством. // ПММ. – 1996. – 60, №1. – С. 132-139.
4. Міщишин І. І. Змішана задача для похилого штампу // Доп. Нан України, 1998. – №10. – С. 70-75.
5. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. – М., 1949.
6. Алейников С. М. Гранично-элементный анализ контактной задачи для жесткого включения в упругом полупространстве. // Конф. «Расчет. методы мех. деформ. тверд. тела», Новосибирск, 11-14 сент., 1995: Тез. докл. – Новосибирск, 1995. – С. 6-7.
7. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир. – 1987. – 524 с.

Звездочкина Е.А., Толок В.А.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ О ВДАВЛИВАНИИ КВАДРАТНОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА В УПРУГОЕ
ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В работе представлен смешанный метод решения статических задач теории упругости для многосвязных областей с бесконечно удаленными границами, в основе которого метод граничных элементов и аналитические решения для полупространств. Предложены решения задачи о вдавливании квадратного в плане штампа в упругое многосвязное полупространство. Проведен сравнительный анализ полученного решения с известными аналитическими выражениями.

Зв'яздочкіна О.А., Толок В.О.

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД КРАЙОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ
ПРО ВДАВЛЮВАННЯ КВАДРАТНОГО У ПЛАНІ ШТАМПА В БАГАТОЗВ'ЯЗНИЙ
ПІВПРОСТІР

В роботі запропонований змішаний метод обчислювання статичних задач теорії пружності для багатозв'язних областей з нескінченно віддаленими межами, в основі якого метод крайових елементів і аналітичні розв'язки для півпросторів. Розв'язані задачі про вдавлювання квадратного в плані штампу в пружний багатозв'язний півпростір. Проведений порівняльний аналіз отриманого розв'язку з відомими аналітичними виразами.

Zvyozdochkina Ye. A., Tolok V. A.

THE MODIFIED METHOD OF BOUNDARY ELEMENTS FOR A SOLUTION OF
TASKS ABOUT IMPRESSION SQUARE STAMP IN AN ELASTIC HALF-SPACE

In work the mixed method of a solution of static tasks of the theory of an elasticity for multicoherent areas with the indefinitely remote boundaries, in which basis a method of boundary elements and analytical solutions for half-spaces is submitted. The solutions of a task about impression square stamp in elastic multicoherent half-space. The comparative analysis of the obtained solution with known analytical expressions is carried out.