

## МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Зінченко Т.В., канд. техн. наук, Малясов О.В.

*Український державний університет харчових технологій*

*Розглядаються математичні моделі формування випадкових чисел з різними законами розподілу з випадкових чисел, розподілених за рівномірним законом на інтервалі  $(0,1)$  чи нормальним законом, а також деякі методи математичного моделювання стаціонарних випадкових процесів з заданою кореляційною функцією.*

При проведенні обчислювальних експериментів часто виникає необхідність моделювання випадкових процесів, заданих на обмеженому інтервалі часу. Для моделювання випадкових процесів важливим є принцип та основні правила формування випадкових чисел з різними законами розподілу. Можна вказати певне співвідношення, що пов'язує випадкові числа  $S_i$  з заданим законом розподілу та числа  $R_i$ , розподілені рівномірно в інтервалі  $(0,1)$ . Відома теорема [1]: якщо

випадкова величина  $\xi$  має щільність розподілу

$$f(x), \text{ то розподіл випадкової величини } \eta = \int_0^{\xi} f(x) dx$$

є рівномірним в інтервалі  $(0,1)$ . З цієї теореми можна зробити висновок : щоб отримати число з сукупності випадкових чисел  $\{S_i\}$  з функцією щільності  $f(x)$ , необхідно розв'язати відносно  $S_i$  рівняння

$$\int_{-\infty}^{S_i} f(x) dx = R_i. \quad (1)$$

Для показникового закону розподілу

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}, \quad (2)$$

де  $m_x$  - математичне сподівання,  $\sigma_x$  - середнє квадратичне відхилення випадкової величини зі значеннями  $x_i$ .

Підставляючи (2) в (1), отримуємо

$$\lambda \int_0^{x_i} e^{-\lambda x} dx = R_i, \quad 1 - e^{-\lambda x_i} = R_i, \quad x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R_i). \quad (3)$$

Формула (3) дає правило отримання випадкових чисел  $S_i = x_i$ , розподілених за показниковим законом (2), з випадкових чисел  $R_i$ , розподілених рівномірно в інтервалі  $(0,1)$ .

Для релєєвського закону

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0, \quad m_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma, \quad \sigma_x^2 = (2 - \frac{\pi}{2}) \sigma^2. \quad (4)$$

Підставляючи функцію щільності розподілу  $f(x)$  з (4) в (1) та обчислюючи

інтеграл  $\int_0^{x_i} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = R_i, \quad e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{x_i} = R_i$ , отримуємо правило формування

випадкових чисел, розподілених за релєєвським законом, з рівномірно розподілених на  $(0,1)$ :  $x_i = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - R_i)}$ .

Для закону Райса  $f(x) = \frac{x}{\sigma} e^{-\frac{x^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0(sx)$ , де  $I_0(x)$  - бесселева функція,  $s$  - параметр

розподілу. Закон Райса можна трактувати як розподіл ймовірностей значень модуля

випадкового вектора на площині з незалежними нормально розподіленими складовими з дисперсіями  $\sigma^2$  та ненульовими математичними сподіваннями. Для зручності моделювання можна вважати математичне сподівання однієї величини рівним  $s$ , а іншої-нулю. Якщо позначити нормально розподілені величини  $\xi_1$  та  $\xi_2$ , то шукана райсова величина  $\eta$  рівна

$$\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \quad (5)$$

За правилом (5) можна формувати також випадкові числа, розподілені за релеєвським законом, якщо за  $\xi_1$  та  $\xi_2$  взяти нормально розподілені випадкові величини з нульовим математичним сподіванням.

$$\text{Для закону розподілу } \chi^2 \text{ з } m \text{ степенями свободи } f(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sigma^2} \left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}},$$

$x \geq 0$ , де  $\Gamma(x)$  - гамма-функція, випадкові числа можна формувати за правилом

$$\eta = \sum_{k=1}^m x_k^2, \text{ де } x_k - \text{нормально розподілені випадкові числа з параметрами } (0, \sigma^2).$$

Для дискретної випадкової величини можна застосовувати підхід, запропонований в [1]. Щоб моделювати випадкові числа, розподілені за законом

Пуассона:  $P(n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , потрібно послідовно для рівномірно розподілених

випадкових чисел  $R_i$  перевіряти виконання умови

$$I_{n-1} < R_i \leq I_n, \quad (6)$$

де значення  $I_{n-1}$  та  $I_n$  обчислюються згідно з формулою  $I_r = e^{-a} \sum_{i=0}^r \frac{a^i}{i!}$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$ ,

$I_{-1} = 0$ . Якщо при якомусь значенні  $n$  нерівності (6) виконуються, то чергове генероване випадкове число  $\eta$  приймається рівним  $n$ . Випадкові числа  $\eta$  мають розподіл Пуассона.

Для моделювання випадкових чисел з функцією щільності розподілу ймовірностей  $f(x)$  на інтервалі  $(a, b)$  достатньо універсальним є метод Неймана [1], який полягає в наступному. Довільно вибираються пари чисел  $x_1, x_2$ , рівномірно розподілених на інтервалі  $(0, 1)$ , з яких формуються перетворені пари чисел  $x_1^*, x_2^*$ :

$x_1^* = a + (b - a)x_1, x_2^* = f_m x_2$ , де  $(a, b)$  – інтервал можливих значень випадкової величини  $x$  з функцією щільності  $f(x)$ ,  $f_m$  – максимальне значення функції  $f(x)$  на інтервалі  $(a, b)$ . Шуканою реалізацією випадкової величини  $x$  можна вважати число  $x_2^*$  з тих пар чисел, для яких виконується нерівність  $x_2^* \leq f(x_1^*)$ . Пари чисел, що не задовольняють цю нерівність, відкидаються.

Для моделювання стаціонарного випадкового процесу його характер задається, як правило, або багатомірними законами розподілу, або матрицею кореляційних моментів. Багатомірні закони розподілу отримати теоретично чи експериментально важко, тому, як правило, застосовують кореляційну теорію. Основна увага приділяється моделюванню стаціонарних нормальних випадкових процесів, а також процесів, які породжуються стаціонарними нормальними при деяких їх лінійних та нелінійних перетвореннях[2]. Досить зручним методом моделювання стаціонарного випадкового процесу є метод ковзної суми, яка базується на лінійному перетворенні стаціонарної послідовності незалежних нормальних випадкових чисел  $x[n]$  в послідовність  $\xi[n]$ , корельовану за заданим законом. При цьому оператор лінійного перетворення записується або у вигляді ковзної суми з деякими коефіцієнтами

$$c_k = c[k]: \xi[n] = \sum_{k=1}^N c_k x[n-k],$$

або як рекурентне співвідношення виду  $\xi[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] +$

$$\dots + a_l x[n-l] - b_1 \xi[n-1] - b_2 \xi[n-2] - \dots - b_m \xi[n-m] = \sum_{k=0}^l a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^m b_k \xi[n-k].$$

Коефіцієнти  $a_k, b_k, c_k$  залежать від виду кореляційної функції. Якщо задано послідовність  $x[n]$  незалежних випадкових чисел з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією, то кореляційна функція такої послідовності

$$\text{має вигляд } R[n] = M\{x[k]x[k+n]\} = \delta_n = \begin{cases} 1, n=0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$$

З послідовності  $x[n]$  формуємо нову послідовність  $\xi[n]$ :

$$\begin{aligned} \xi[n] &= c_1 x[n-1] + \dots + c_N x[n-N], \\ \xi[n+1] &= c_1 x[n] + \dots + c_N x[n+1-N] \end{aligned} \quad \text{і т.д.}$$

Для обчислення кожного наступного значення  $\xi[n+1]$  початкова послідовність  $x[n]$

зміщується на один елемент вправо. Корельованість між випадковими величинами  $\xi[n]$  і  $\xi[n+k]$  досягається за рахунок того, що в їх утворенні застосовуються  $k$  спільних випадкових величин послідовності  $x[k]$ . Якщо випадкові числа  $x[n]$  розподілені нормально, то із-за лінійності перетворень послідовність  $\xi[n]$  буде нормальним випадковим процесом. Характер кореляційних зв'язків процесу  $\xi[n]$  визначається вибором коефіцієнтів  $c_k$ .

Якщо корельована послідовність  $\xi[n]$  імітує в точках  $t_n = n\Delta t$  значення стаціонарного процесу  $\xi(t)$  з кореляційною функцією  $R(\tau)$ , то в точках  $\tau_n = n\Delta t$  виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} R[0] &= c_1^2 + \dots + c_N^2, \\ R[1] &= c_1 c_2 + \dots + c_{N-1} c_N, \\ &\dots\dots\dots \\ R[N-1] &= c_1 c_N, \\ R[N] &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

де  $R[n] = R(n\Delta t)$ .

Сума квадратів коефіцієнтів  $c_i, i=1\dots N$ , повинна бути рівна дисперсії модельованого процесу. Задача обчислення коефіцієнтів є складною, для їх знаходження використовують різні методи розв'язування нелінійної системи алгебраїчних рівнянь, розкладу функцій в ряд Фур'є тощо [3].

Розглянемо приклад стаціонарного випадкового процесу з трикутною кореляційною функцією

$$R[\tau] = \begin{cases} \sigma^2 \left( 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \right), & |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0, \end{cases} \tag{8}$$

для моделювання якого з допомогою ковзної суми можна отримати коефіцієнти  $c_k$  без застосування універсальних методів. Якщо в системі рівнянь (7) покласти  $c_k = c$ , то отримуємо

$$R[n] = \begin{cases} (N - |n|)c^2, & |n| \leq N - 1, \\ 0, & |n| > N - 1. \end{cases} \tag{9}$$

Послідовність (9) відповідає кореляційній функції (8), якщо відношення

$N = \tau_0 / \Delta t$  є цілим числом. Вибіраючи це відношення цілим числом, обчислюємо

$N$ , значення  $c_1, \dots, c_N$  приймаємо однаковими і рівними  $c = \sigma / \sqrt{N}$ . Алгоритм формування

випадкового процесу з трикутною кореляційною функцією зводиться до ковзної суми ортонормованої послідовності випадкових чисел за формулою

$$\xi[n] = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N x[n-k].$$

При моделюванні нормального випадкового процесу вхідна послідовність  $x[n]$  може мати як нормальний, так і рівномірний розподіл, так як при підсумовуванні рівномірних випадкових чисел з однаковими параметрами закон розподілу суми буде наближуватись до нормального вже при  $N \geq 3$ . Для рівномірно розподіленої на інтервалі  $(0,1)$  послідовності  $x[n]$  алгоритм моделювання нормального випадкового процесу з трикутною кореляційною матрицею має вигляд

$$\xi[n] = \sigma \sqrt{\frac{12}{N}} \left( \sum_{k=0}^N x[n-k] - \frac{N}{2} \right), N > 3.$$

### Висновки

1. Розглянуті правила формування випадкових чисел з різними законами розподілу можна застосовувати для організації обчислювальних експериментів з метою дослідження змінних процесів, у тому числі й технологічних процесів харчової промисловості.
2. Для моделювання стаціонарного випадкового процесу з відомою кореляційною функцією доцільно застосовувати метод ковзної суми.

### Література

1. Н.П.Бусленко и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Под редакцией Ю.А.Шрейдера. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы. – 1962. – 33 с.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
3. Зеленский К.Х., Игнатенко В.Н., Коц А.П. Компьютерные методы прикладной математики. – К.: Дизайн – В, 1999. – 352 с.