

УДК 681.513.5

О.П.ЛОБОК, кандидат фізико-математичних наук,

Б.М.ГОНЧАРЕНКО, доктор технічних наук,

Д.О. БАРКАР, магістр

Національний університет харчових технологій

ЗАСТОСУВАННЯ ПІДХОДІВ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРИ СИНТЕЗІ

КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ

При синтезі оптимального керування розглянута задача переходу від виду математичної моделі системи керування з запізнюванням до такої ж без запізнювання. Показане застосування векторно-матричного представлення моделі об'єкта та зведення її до узагальненої системи з розширеним вектором стану, що не містить запізнювання. Показане модифікування виразу критерію оптимальної якості керування до форми, що містить математичне сподівання.

Ключові слова: синтез керування, запізнювання, канал керування, передатна функція, збурення, ректифікаційна колона, вектор стану, узагальнений стан.

Аналітичне конструювання систем керування різних типів в тому числі оптимальних аналогових або дискретних (синтез керування) обмежувалося до недавня можливостями їх практичної реалізації. Змістом синтезу керування є сумісне розв'язання рівнянь (математичних моделей) системи, об'єкта та критерію якості керування з орієнтацією на бажаний результат. Відомі розв'язки задач синтезу керування [1,2,4] для лінійних систем. Наявність нелінійностей або запізнювання в об'єктах чи в каналах керування суттєво ускладнює синтез, хоч і є відомі розв'язки для деяких часткових умов [2], коли реальне транспортне запізнювання в каналі керування заміщується на перехідне.

Широке розповсюдження комп'ютерної та мікропроцесорної техніки в галузі автоматизації знімає обмеження на реалізацію синтезованих керувань, але проблема наявності і впливу запізнювання може ускладнювати розв'язання задач синтезу.

Тут показано на частковому прикладі керування ректифікаційною колоною (РК), як за допомогою відомого прийому розкладання виразу математичного опису РК як багатовимірної об'єкта в ряд Тейлора усунути вплив запізнювання в об'єкті керування та перейти до еквівалентного математичного опису без запізнювання, щоб суттєво спростити і полегшити аналітичні розв'язки при проектуванні керування.

Ректифікаційна колона (РК), в браго-ректифікаційній установці відділяє воду та хвостові домішки, концентрує у верхній частині етиловий спирт та забезпечує отримання спирту-ректифікату потрібної якості.

РК – є складним багатовимірним об'єктом регулювання та має велику кількість сильних перехресних зв'язків [3].

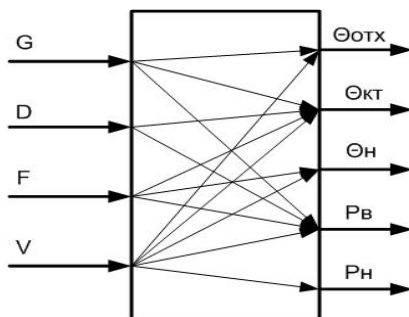


Рис. 1. Основні взаємозв'язки вхідних та вихідних величин РК

На рис.1 зображена параметрична схема РК, де вхідні величини це – G - витрата охолоджувальної води, D - відбір спирту-ректифікату з РК, F - витрата бражки, V - витрата пари; вихідні величини: $\Theta_{отх}$ - температура охолоджувальної води, $\Theta_{кт}$ - температура на контрольній тарілці, Θ_n - температура внизу колони, P_v , P_n - тиск вверху та внизу колони. На основі

параметричної схеми отримано динамічну модель ректифікаційної колони, структурна схема та передатні функції якої представлені на Рис.2.

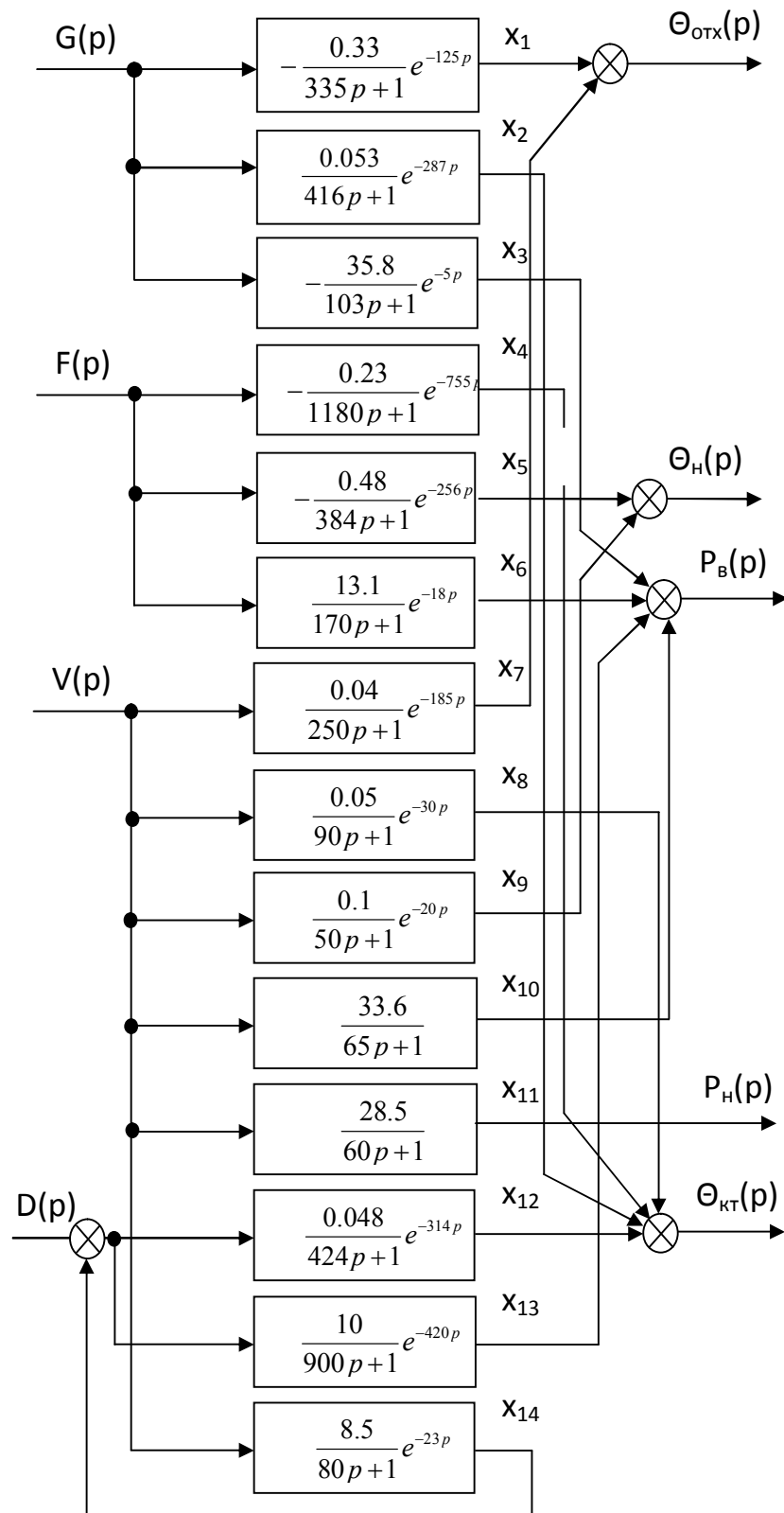


Рис.2. Структурна схема математичної моделі РК

Числові значення коефіцієнтів передатних функцій відповідають колоні, продуктивністю 6000 дал на добу.

Система диференціальних рівнянь математичної моделі РК може бути отримана за допомогою зворотного перетворення Лапласа передатних функцій структури моделі РК. Наприклад, перший блок структурної схеми в часовій області може бути описаний першим диференціальним рівнянням системи (1).

Аналогічно можна отримати рівняння динаміки кожного блоку схеми. В результаті прийдемо до наступної системи звичайних диференціальних рівнянь з запізнюванням в аргументі, яка описує РК як багатовимірний об'єкт, що досліджується:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{335}x_1(t-\tau_1) - \frac{0.33}{335}G(t-125), \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{416}x_2(t-\tau_2) - \frac{0.053}{416}G(t-287), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{12}}{dt} = -\frac{1}{424}x_{12}(t-\tau_{12}) + \frac{0.048}{424}D(t-314) + \frac{0.048}{424}x_{14}(t-\tau_{14}), \\ \frac{dx_{13}}{dt} = -\frac{1}{900}x_{13}(t-\tau_{13}) + \frac{10}{900}D(t-420) + \frac{10}{900}x_{14}(t-\tau_{14}), \\ \frac{dx_{14}}{dt} = -\frac{1}{80}x_{14}(t-\tau_{14}) + \frac{8.5}{80}F(t-30). \end{array} \right. \quad (1)$$

Для зручності аналізу системи (1) введемо наступні позначення:

коефіцієнтів при x_i :

$$\begin{array}{l} a_1 = -\frac{1}{335}, \quad a_2 = -\frac{1}{416}, \quad a_3 = -\frac{1}{103}, \quad a_4 = -\frac{1}{1180}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{13} = -\frac{1}{900}, \quad a_{14} = -\frac{1}{80}, \quad a_{15} = -\frac{0.048}{424}, \quad a_{16} = -\frac{10}{900}; \end{array}$$

запізнювань в керуванні:

$$\begin{array}{l} s_1 = 125, \quad s_2 = 287, \quad s_3 = 5, \quad s_4 = 755, \quad s_5 = 256, \quad s_6 = 18, \quad s_7 = 185, \\ s_8 = 30, \quad s_9 = 20, \quad s_{10} = 0, \quad s_{11} = 0, \quad s_{12} = 314, \quad s_{13} = 420, \quad s_{14} = 30; \end{array}$$

коефіцієнтів при керуванні:

$$b_1 = -\frac{0.33}{335}, \quad b_2 = \frac{0.053}{416}, \quad b_3 = -\frac{35.8}{103}, \quad b_4 = -\frac{0.23}{1180}, \quad b_5 = -\frac{0.48}{384},$$

.....

$$b_{12} = \frac{0.048}{424}, \quad b_{13} = \frac{10}{900}, \quad b_{14} = \frac{8.5}{80};$$

керувань: $u_1 = G, u_2 = F, u_3 = V, u_4 = D;$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{14} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

З врахуванням цих позначень система (1) набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1(t - \tau_1) + b_1 u_1(t - s_1), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2 x_2(t - \tau_2) + b_2 u_1(t - s_2), \\ \dots \\ \frac{dx_{12}}{dt} = a_{12} x_{12}(t - \tau_{12}) + a_{15} x_{14}(t - \tau_{14}) + b_{12} u_4(t - s_{12}), \\ \frac{dx_{13}}{dt} = a_{13} x_{13}(t - \tau_{13}) + a_{16} x_{14}(t - \tau_{14}) + b_{13} u_4(t - s_{13}), \\ \frac{dx_{14}}{dt} = a_{14} x_{14}(t - \tau_{14}) + b_{14} u_2(t - s_{14}). \end{array} \right. \quad (2)$$

Для приведення отриманої системи до векторно-матричної форми введемо наступні позначення:

$$C_a = \begin{pmatrix} a_1 x_1(t - \tau_1) \\ a_2 x_2(t - \tau_2) \\ a_3 x_3(t - \tau_3) \\ \dots \\ a_{11} x_{11}(t - \tau_{11}) \\ a_{12} x_{12}(t - \tau_{12}) + a_{15} x_{14}(t - \tau_{14}) \\ a_{13} x_{13}(t - \tau_{13}) \\ a_{14} x_{14}(t - \tau_{14}) \end{pmatrix}, \quad C_b = \begin{pmatrix} b_1 u_1(t - s_1) \\ b_2 u_1(t - s_2) \\ b_3 u_1(t - s_3) \\ \dots \\ b_8 u_3(t - s_8) \\ b_{12} u_4(t - s_{12}) \\ b_{13} u_4(t - s_{13}) \\ b_{14} u_2(t - s_{14}) \end{pmatrix}.$$

Можна довести, що вектор C_a дорівнює наступному:

$$C_a = A_1 x(t - \tau_1) + A_2 x(t - \tau_2) + \dots + A_{13} x(t - \tau_{13}) + A_{14} x(t - \tau_{14}) = \sum_{k=1}^{14} A_k x(t - \tau_k), \quad (3)$$

де A_k , $k = 1, 2, \dots, 13$ – матриці розмірності 14×14 виду

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_k & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в яких a_k – k -й діагональний елемент,

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{14} \end{pmatrix}, \quad x(t - \tau_k) = \begin{pmatrix} x_1(t - \tau_k) \\ x_2(t - \tau_k) \\ \dots \\ x_{14}(t - \tau_k) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно можна показати, що

$$C_b = B_1 u(t - s_1) + B_2 u(t - s_2) + \dots + B_{14} u(t - s_{14}) = \sum_{k=1}^{14} B_k u(t - s_k), \quad (4)$$

де B_k – матриці розмірності 14×4 , причому

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3; \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_k & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 4, 5, 6;$$

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = 7, 8, 9, 10, 11; \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = 12, 13;$$

$$B_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що елементи b_k знаходяться (належать) в k -му рядку відповідної матриці B_k , $k = 1, 2, \dots, 13$.

Враховуючи (3) та (4), систему (2) можна записати у векторно-матричному вигляді як

$$\frac{dx(t)}{dt} = C_a + C_b = \sum_{k=1}^{14} A_k x(t - \tau_k) + \sum_{k=1}^{14} B_k u(t - s_k), \quad (5)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{14}(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{pmatrix}.$$

Так як дана система є досить складною, що пов'язано з наявністю запізнювання як в координатах вектора стану, так і в координатах вектора керування, спростимо систему за рахунок зведення її до системи без запізнювання. Для цього використаємо розкладання в ряд Тейлора вектор-функцій $x(t - \tau_k)$ і $u(t - s_k)$. В результаті одержимо

$$x(t - \tau_k) = x(t) - \tau_k \dot{x}(t) + o(\tau_k), \quad (6)$$

$$u(t - s_k) = u(t) - s_k \dot{u}(t) + o(s_k), \quad (7)$$

де $o(\tau_k)$ та $o(s_k)$ – величини більш високого порядку малості ніж τ_k та s_k відповідно.

Враховуючи співвідношення (6) та (7), систему (5) можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{k=1}^{14} A_k (x(t) - \tau_k \dot{x}(t)) + \sum_{k=1}^{14} B_k (u(t) - s_k v(t)) = \\ &= \sum_{k=1}^{14} A_k x(t) - \sum_{k=1}^{14} A_k \tau_k \dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{14} B_k u(t) - \sum_{k=1}^{14} B_k s_k v(t),\end{aligned}$$

де $v(t) = \dot{u}(t)$.

Якщо позначити

$$F_A = \sum_{k=1}^{14} A_k, \quad F_B = \sum_{k=1}^{14} B_k, \quad G_A = \sum_{k=1}^{14} A_k \tau_k, \quad G_B = \sum_{k=1}^{14} B_k s_k,$$

то остання система може бути перетворена до наступної

$$(E + G_A) \dot{x}(t) = F_A x(t) + F_B u(t) - G_B v(t),$$

де E – одинична матриця.

Роблячи нову заміну $M = E + G_A$, останню систему можна зобразити як

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) - Hv(t),$$

де $A = M^{-1}F_A$, $B = M^{-1}F_B$, $H = M^{-1}G_B$.

Щоб позбутися запізнювання, розглянемо вектор розширеного (узагальненого) стану системи $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$, що враховує одночасно і стан об'єкта і його керування:

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} -H \\ E \end{pmatrix} v(t),$$

або

$$\frac{d}{dt} z(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}v(t), \tag{8}$$

де

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} -H \\ E \end{pmatrix}.$$

Рівняння (8) відносно вектора узагальненого стану об'єкта $z(t)$ не містить запізнювання і може використовуватися при аналітичному конструюванні керувань (регуляторів) за відповідними методиками лінійної теорії.

В задачах оптимального керування часто розглядається інтегрально-квадратичний критерій якості оптимального керування:

$$I(u) = \int_{t_0}^T [x^T(t)Px(t) + u^T(t)Qu(t)] dt + x^T(T)P_Tx(T), \quad (9)$$

де P, Q, P_T – задані симетричні додатньовизначені вагові матриці.

Використовуючи вектор узагальненого стану $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$,

підінтегральний вираз критерію можна представити у вигляді

$$x^T(t)Px(t) + u^T(t)Qu(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = z^T(t)P_1z(t),$$

а другий доданок критерію можна перетворити до вигляду

$$x^T(T)P_Tx(T) = \begin{pmatrix} x^T(T) & u^T(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(T) \\ u(T) \end{pmatrix} = z^T(T)\bar{P}z(T).$$

Тоді інтегральний квадратичний критерій (9) запишеться наступним чином

$$I(u) = \int_{t_0}^T z^T(t)P_1z(t)dt + z^T(T)\bar{P}z(T).$$

Враховуючи, що система керування функціонує в умовах певних зовнішніх збурень, а також те, що система (8) була одержана в ході деяких спрощувальних припущень, запишемо її у вигляді

$$\frac{d}{dt}z(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}v(t) + \xi(t),$$

де останній доданок $\xi(t)$ враховує невизначеність системи від існуючих збурень та спрощувальних припущень.

Крім того, коефіцієнти матриць $\bar{A}$ і $\bar{B}$ можуть мати певну невизначеність, пов'язану з спрощеннями, при розкладанні в ряд Тейлора, тому результуюча

система може бути представлена у вигляді стохастичної системи з адитивними ($\xi(t)$) та мультиплікативними ($w(t)$) збуреннями

$$\frac{dz(t)}{dt} = \left(\bar{A}(t) + \sum_{i=1}^k \Theta_i(t) w_i(t) \right) z(t) + \left(\bar{B}(t) + \sum_{i=1}^k \Psi_i(t) w_i(t) \right) v(t) + \xi(t), \quad (10)$$

де $w_i(t)$ – стохастичний вінерівський процес [5], $\Theta_i(t)$, $\Psi_i(t)$ – відомі матриці, які визначають степінь збурення коефіцієнтів матриць $\bar{A}(t)$ та $\bar{B}(t)$ системи управління.

Оскільки тепер вектор стану $z(t)$ – стохастичний процес, критерій якості теж має мати стохастичну форму і тому його відповідно необхідно видозмінити. Використаємо, наприклад, таку форму критерію, яка містить математичне сподівання

$$I(u) = M \left\{ \int_{t_0}^T \left[z^T(t) P(t) z(t) + v^T(t) Q(t) v(t) \right] dt + z^T(T) P_T z(T) \right\}, \quad (11)$$

де $P(t)$, $Q(t)$, P_T – задані симетричні додатньовизначені вагові матриці.

Розв'язавши задачу аналітичного конструювання оптимального регулятора [4] для узагальненої стохастичної моделі об'єкта (10) з критерієм оптимальності (11), можна одержати вираз оптимального керування, яке в свою чергу зреалізовується на засобах мікропроцесорної техніки у вигляді програми і може відносно просто застосовуватися в системі оптимального автоматичного керування РК в реальній системі автоматизації.

Висновок. Представлення аналітичної моделі об'єкта керування з запізнюванням у векторно-матричному вигляді дозволяє після розкладання в ряд Тейлора її вектор-функції стану та керування одержати модель з розширеним вектором стану об'єкта у вигляді стохастичної системи з адитивними та мультиплікативними збуреннями та синтезоване керування ним без запізнювання і залишитися при цьому у рамках лінійної теорії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Луцька Н.М. Керованість та спостережуваність технологічного об'єкта управління // Східно-Європейський журнал передових технологій. 2010. - № 1/5 (43).
2. Гончаренко Б.М. Синтез оптимальних регуляторів для динамічного об'єкта другого порядку / Гончаренко Б.М., Лобок О.П. – К.: НУХТ, Харчова промисловість, №7. 2008.
3. Цыганков П.С. Брагоректификационные установки. – М.: Пищевая промышленность, 1970. – 352 с.
4. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
5. Пугачев В.С., Сеницын И.И. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

О.П.ЛОБОК, Б.М.ГОНЧАРЕНКО, Д.О. БАРКАР

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОДХОДОВ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПРИ СИНТЕЗЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

При синтезе оптимального управления рассмотрена задача перехода от вида математической модели системы управления с запаздыванием к такой же без запаздывания. Показано применение векторно-матричного представления модели объекта и сведение её к обобщенному вектору расширенного состояния. Показана модификация выражения критерия оптимального качества управления в форму, которая содержит математическое ожидание.

Ключевые слова: синтез управления, запаздывание, канал управления, передаточная функция, возмущение, ректификационная колонна, вектор состояния, обобщенное состояние.

O.P. LOBOK, B.M. GONCHARENKO, D.O. BARKAR

APPROACHES IN THE SYNTHESIS OF LINEAR CONTROL THEORY FOR SYSTEMS WITH DELAY

At the synthesis of optimum management the task of transition from the form of mathematical model of control system is considered with a delay to the same without a delay. Were shown the using of vectorial-matrix presentations of model of object and taking of it to the generalized system with the extended vector of the state, which does not contain a delay, but takes into account simultaneously the state of management object and actually management by it. Modification of expression of criterion of optimum quality of management is shown to the form which contains the expected value with the purpose of the use in stochastic control system for the account of additive and multiplicative indignations from existing in the stochastic system of disturbance.

Keywords: synthesis of control, delay, channel of management, the transfer function, disturbance, fractionator, state vector, generalized state.

Одержано редколегією 01.12.2011