

ПРО МНОЖИНУ СКІНЧЕННИХ РІВНІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

В.М. САФОНОВ, кандидат фізико-математичних наук

О.М. НЕЩАДИМ, кандидат фізико-математичних наук

О.П. ЗІНЬКЕВИЧ, кандидат фізико-математичних наук

У роботі розглядаються неперервні функції однієї дійсної змінної з множиною скінченних рівнів скрізь другої категорії. Доведено, що у разі нульвимірності зазначених відображень множина їх нескінченних рівнів ніде не щільна.

Ключові слова: рівень функції, нульвимірне відображення, ніде не щільна множина, скрізь щільна множина, множина другої категорії.

Особливо важливими в багатьох випадках виявляються дослідження, які пов'язані з неперервними відображеннями, що не мають інтервалів сталості.

Мета досліджень

Знання багатьох властивостей сукупності усіх рівнів функції (відображення) часто дає змогу охарактеризувати її структурні особливості. У зв'язку із цим важливою задачею є вивчення в термінах категорії множини рівнів дійсних функцій однієї дійсної змінної.

Матеріали та методика досліджень

Використовуючи категорний підхід охарактеризуємо множину рівнів неперервного відображення.

Як зазвичай, через R позначимо одновимірний евклідов простір. Нехай $f: [a, b] \rightarrow R$ - неперервне відображення. Введемо такі поняття [1], [2], [3].

Досконалою множиною називається замкнена множина, кожна точка якої є граничною точкою цієї множини. Множина $A \subset R$ щільна в множині $B \subset R$, якщо кожна точка множини B є граничною точкою множини A , тобто якщо $B \subset \bar{A}$. У разі коли множина A щільна в R , то вона називається скрізь щільною.

Множина $A \subset R$ ніде не щільна в R , якщо кожна відкрита множина $G \subset R$ має іншу відкриту підмножину $G' \subset R$, яка не містить точок A . Замикання ніде не щільної множини $\bar{A}$ ніде не щільне в R . Об'єднання будь-якого скінченного числа ніде не щільних множин ніде не щільне. Зліченне об'єднання ніде не щільних множин не є, взагалі кажучи, ніде не щільним; воно може бути навіть щільним. Наприклад, множина раціональних точок щільна в R .

Множина $\tilde{A}$ називається множиною першої категорії в R , якщо її можна зобразити у вигляді об'єднання скінченної або зліченної сукупності ніде не щільних множин: $\tilde{A} = \bigcup_n A_n$. Як приклад множини першої категорії – множина раціональних точок в R .

Якщо ж множину $E \subset R$ не можна зобразити у вигляді об'єднання ніде не щільних множин, то вона називається множиною другої категорії в R . Наприклад, довільна відкрита множина в R являє собою таку множину.

У разі коли доповнення $R \setminus E$ є множиною першої категорії, то множина E резидуальна, тобто вона – скрізь другої категорії або інакше – другої категорії в кожній своїй відкритій порції в R .

Замкнена множина $P \subset R$ називається нульвимірною ($\dim P = 0$), якщо вона ніде не щільна в R . Прикладами тут можуть бути довільні скінченна, а також зліченна замкнена множини в R . Нетривіальним прикладом є канторова досконала множина на відрізку $[0,1]$ (потужності континуума у кожній своїй порції).

Розглянемо повний прообраз $f^{-1}f(x_0)$ точки $x_0 \in [a,b]$, який також будемо називати рівнем відображення f . Для неперервного f рівні його являють собою замкнені множини в $[a,b]$, скінченні або нескінченні. Більш того, приклади показують, що існують неперервні відображення, у яких всі рівні не тільки нескінченні але і незліченні. Існують відображення, у яких всі рівні навіть досконалі, тобто не містять ізольованих точок.

Відображення f називається нульвимірним, якщо кожний його рівень є нульвимірною множиною, тобто $\dim f^{-1}f(x_0) = 0$ для будь-якого $x_0 \in [a,b]$.

Далі через $n(y)$ позначимо індикатрису Банаха – функцію, задану на відріжку $[m, M]$, де $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ і $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, і значення якої – число коренів рівняння $f(x) = y$. Якщо множина цих коренів нескінченна, то $n(y) = +\infty$. Зрозуміло, що $0 \leq n(y) < +\infty$ для довільного скінченного рівня $f^{-1}(y)$.

Тепер маємо таке твердження.

Теорема 1. Нехай $f : [a, b] \rightarrow R$ – неперервне нульвимірне відображення і множина його скінченних рівнів E скрізь другої категорії на $f([a, b])$. Тоді множина нескінченних рівнів відображення f ніде не щільна.

Доведення. За умовою відображення f нульвимірне і має множину E скінченних рівнів скрізь другої категорії на образі $f([a, b])$. Тому існує скрізь щільна на відріжку $[a, b]$ скінченна або зліченна послідовність $\{(a_i, b_i)\}$ інтервалів попарно без спільних точок, в кожному з яких f є строго монотонним [4], причому надалі можна вважати, що ніде не щільна замкнена множина $P = [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i) \neq \emptyset$ і в жодному околі кожної точки $x \in P$ відображення f не є монотонним. При цьому точки множини $[a, b] \setminus P$ будемо називати регулярними.

Покажемо тепер, що доповнення $f([a, b]) \setminus E$ є ніде не щільною множиною. Зробимо це від супротивного. Припустимо, що знайдеться відрізок $[c, d] \subset f([a, b])$ на якому множина $f([a, b]) \setminus E$ є скрізь щільною.

Позначимо через F_n множину точок прямої $R = R_y$, кожній з яких відповідає щонайбільше n точок доповнення $[a, b] \setminus P$. Будь-яка множина F_n замкнена на R , оскільки легко довести, що її доповнення відкрите. Зазначимо тут, що точку $a \in [a, b]$ вважатимемо регулярною лише у тому випадку, якщо відображення f у точках a і $b \in [a, b]$ однобічно зростає або спадає. Тоді обидві ці точки слід визнавати за одну. Очевидно маємо $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$.

Оскільки E є множиною скрізь другої категорії на $f([a, b])$ і $\bigcup_n F_n \supset E$ то об'єднання $\bigcup_n F_n$ також скрізь другої категорії на відріжку $[c, d] \subset f([a, b])$. На

підставі цього існує інтервал $\Delta \subset [c, d] \subset f([a, b])$, в якому хоча б одна з множин F_n є скрізь щільною. Внаслідок замкненості множини F_n звідси маємо $\Delta \subset F_n$.

Нехай точці $y_0 \in \Delta$ відповідає максимально можливе число N точок $\{x_k\} (k=1, 2, \dots, N)$ з доповнення $[a, b] \setminus P$ серед усіх точок інтервала Δ . Зрозуміло, що $N \leq n$.

Побудуємо далі такі інтервали – околи $U(x_k) (k=1, 2, \dots, N)$ точок $x_k \in [a, b] \setminus P$, щоб образ кожного з них був деяким фіксованим інтервалом $\delta(y_0) \subset \Delta \subset [c, d]$ з центром в точці y_0 і щоб замикання цих околів – відрізки $\overline{U(x_k)} \subset [a, b] \setminus P (k=1, 2, \dots, N)$. Можливість виконання такої побудови легко впливає з відкритості строго монотонних функцій.

За припущенням множина нескінченних рівнів відображення f є скрізь щільною на відрізку $[c, d] \subset f([a, b])$. Отже, існує точка $\tilde{y}$ доповнення $[c, d] \setminus E \subset f([a, b])$ така, що $\tilde{y} \in \delta(y_0) \subset \Delta$.

Розглянемо рівень $f^{-1}(\tilde{y})$ відображення f , який є нескінченною нульвимірною множиною. Тоді маємо $f^{-1}(\tilde{y}) \cap P \neq \emptyset$ і в деякій точці $\tilde{x} \in P$ дістанемо $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Оскільки множина P ніде не щільна і $\tilde{x}$ не міститься в об'єднанні $\bigcup_{k=1}^N \overline{U(x_k)}$, то існує послідовність точок $\{\tilde{x}_m\}, \tilde{x}_m \in [a, b] \setminus P (m=1, 2, \dots)$, яка є збіжною до $\tilde{x}$. За неперервністю відображення f образи цих точок $\tilde{y}_m = f(\tilde{x}_m)$, починаючи з деякого номера m , будуть лежати у середині інтервалу $\delta(y_0)$.

Попереднє свідчить про таке. Якщо $\tilde{y}_m$ – одна з таких точок, то їй має відповідати множина, яка містить принаймні $N+1$ точок з доповнення $[a, b] \setminus P$. Це суперечить визначенню точки y_0 і числа N .

Отримане протиріччя доводить теорему.

Те, що вище доведена теорема не є вірною без додаткової вимоги про нульвимірність відображення, показує приклад [5] відомої канторової функції $\theta(x), x \in [0, 1]$. Будучи сталою на замиканні кожного з суміжних інтервалів до

канторової множини P_0 , функція $\theta(x)$ на щільній відкритій підмножині $[0,1] \setminus P_0$ відрізка $[0,1]$ є зростаючою, а її множина значень (на цій підмножині) скрізь щільна (і до того ж першої категорії) в $[0,1]$.

З встановленого результату маємо такі наслідки.

Теорема 2. Якщо виконуються всі умови теореми 1, то множина злічених рівнів відображення f ніде не щільна.

Теорема 3. За умов теореми 1 множина незлічених рівнів відображення f є ніде не щільною.

Нарешті, якщо взяти замикання доповнення $f([a,b]) \setminus E$ і розглянути множину скінчених рівнів відображення f , то згідно теореми 1 дістанемо відкрити скрізь щільну на $f([a,b])$ множину $e \in E$. Отже, основний результат можна переформулювати таким чином.

Теорема 4. Нехай неперервне нульвимірне відображення $f(x), x \in [a,b]$ має множину $E \subset f([a,b])$ скінчених рівнів скрізь другої категорії. Тоді множина E містить внутрішні точки відносно прямої R на будь-якому інтервалі $(\alpha, \beta) \subset f([a,b])$.

З доведення основної теореми випливає, що на кожному відрізку $[\lambda, \mu] \subset f([a,b])$ існує інтервал $\delta \subset [\lambda, \mu]$, кожній точці якого відповідає точно N точок, причому лише з доповнення $[a,b] \setminus P$. Звідси дістаємо таке твердження.

Теорема 5. Якщо неперервне відображення $f:[a,b] \rightarrow R$ нульвимірне з множиною скінчених рівнів скрізь другої категорії, то існує відкрита скрізь щільна на $f([a,b])$ множина G , в кожній компоненті якої його індикатриса Банаха $n(y)$ обмежена.

Результати досліджень

Отже, якщо неперервна функція ніде не стала на відрізку і множина її скінчених рівнів другої категорії, то ця множина містить внутрішні точки, в околі кожної з яких індикатриса Банаха обмежена.

Висновки

На підставі попереднього для неперервної на відрізку функції, яка ніде не стала, множину її скінченних рівнів з точністю до ніде не щільної множини можна вважати відкритою і скрізь щільною, якщо вона другої категорії.

Список літератури

1. Куратовский К. Топология: В 2-х томах – М.: Мир, 1996.-т.1.-595 с.
2. Трохимчук Ю.Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008.- 539 с.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной – М.: Наука, 1974.-480с.
4. Сафонов В.М. Про зліченно-кратні функції / Аналіз і застосування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2012. – т.9, №2 – Київ: Ін-т математики НАН України, 2012. – С. 341-346.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе – М.: Мир, 1967. – 252с.

This paper considers continuous functions of real variable with a set of finite levels of the second category. We proved that in the case of zero-dimensionality, the set of its infinite levels is nowhere-dense.

Level of function, zero-dimensional mapping, nowhere-dense set, dense set, set of the second category.

В работе рассматриваются непрерывные функции одной действительной переменной с множеством конечных уровней всюду второй категории. Доказано, что в случае нульмерности указанных отображений множество их бесконечных уровней нигде не плотно.

Уровень функции, нульмерное отображение, нигде не плотное множество, всюду плотное множество, множество второй категории.