

УДК 517.537.72

© 1999

О.М. Мулява

Класи збіжності в теорії рядів Діріхле

(Представлено академіком НАН України Ю.О. Митропольським)

For the Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n)$, $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$, with the abscissa of absolute convergence $A \in (-\infty, +\infty]$ and for some continuous positive functions α and β , the conditions on a_n , under which $\int_{\sigma_0}^A \frac{\alpha(\ln M(\sigma))}{\beta(\sigma)} d\sigma < +\infty$, $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$, are established.

І. Ж. Валірон [1, с. 18] показав, що якщо ціла функція $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ має порядок $\rho \in (0, \infty)$ і належить до класу збіжності, тобто

ведливими є і наступні теореми.

Теорема 3. Нехай показники цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову $\ln n = O(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, а $\rho \in (0, +\infty)$. Тоді для того, щоб виконувалось співвідношення (3), необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\chi_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) |a_n|^{\rho/\lambda_n} < +\infty. \quad (9)$$

Теорема 4. Нехай $\rho \in (1, +\infty)$, а показники цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову $\ln n = O(\lambda_n^{\rho/(\rho-1)})$, $n \rightarrow \infty$. Тоді для того щоб

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma^{\rho+1}} < +\infty,$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\chi_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right)^{1-\rho} < +\infty.$$

Теорема 5. Нехай $\rho \in (0, +\infty)$, а показники абсолютно збіжного в півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ ряду Діріхле (1) задовольняють умову

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} < \frac{\rho}{\rho+1}.$$

Тоді для того щоб виконувалось співвідношення (5), необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\chi_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\lambda_n} \right)^{\rho+1} < +\infty. \quad (10)$$

Теорема 6. Нехай $\rho \in (0, +\infty)$, а показники абсолютно збіжного в півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ ряду Діріхле (1) задовольняють умову $\ln n = O(\ln \lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$. Тоді для того щоб

$$\int_{-1}^0 \frac{\ln^+ M(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp(\rho/|\sigma|)} d\sigma < +\infty,$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\chi_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\lambda_n} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{\rho \lambda_n}{\ln^+ |a_n|} \right\} < +\infty.$$

Неважко побачити, що у випадку виконання умови (2), співвідношення (4) рівносильне співвідношенню (9), а співвідношення (6) — співвідношенню (10). Нарешті, наведений в п. 1 результат із [3] легко випливає з наступної теореми.

Теорема 7. Нехай функція α і послідовність (λ_n) такі, як в теоремі 2, а ряд Діріхле (1) має нульову абсцису абсолютної збіжності. Тоді для того щоб

необхідно, а у випадку, коли $\kappa_n(F) \uparrow 0$, $n \rightarrow \infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^+ |a_n|}{\lambda_n^2} < +\infty.$$

Виникає природне запитання, як зміняться співвідношення (4) і (6), якщо умова (2) не виконується. Відповідь на це запитання вимагає певного уточнення нерівності Харді [4, с. 89]. Крім того, в даній статті розглядаються значно загальніші співвідношення, ніж ті, що визначають наведені вище класи збіжності.

2. Як і в [5], нехай L_0 — клас неперервних додатних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Наведемо спочатку такі дві загальні теореми.

Теорема 1. Нехай α — вгнута на $[x_0, +\infty)$ функція і $\alpha(e^x) \in L^0$, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови $x\beta'(x)/\beta(x) \geq h > 0$, $x \in [x_0, +\infty)$, і

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx < +\infty. \quad (7)$$

Припустимо, що показники цілого ряду Діріхле (1) такі, що $\ln n = o(\lambda_n \alpha^{-1}(\beta(\lambda_n)))$, $n \rightarrow \infty$. Тоді для того, щоб

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)} d\sigma < +\infty,$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(\lambda_n) - \alpha(\lambda_{n-1})) \beta_1 \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}.$$

Теорема 2. Нехай функція α така, як в теоремі 1, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови (7) і $x\beta'(x)/\beta(x) - 2 \geq h > 0$, $x \in [x_0, +\infty)$. Припустимо, що показники абсолютно збіжного в півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ ряду Діріхле (1) такі, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} < 1. \quad (8)$$

Тоді для того щоб

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} \frac{\alpha(\ln^+ M(\sigma, F))}{|\sigma|^2 \beta(1/|\sigma|)} d\sigma < +\infty,$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(\lambda_n) - \alpha(\lambda_{n-1})) \beta_1 \left(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|} \right) < \infty.$$

Легко побачити, що функція $\alpha(x) \equiv x$ не задовольняє умови теорем 1 і 2. Проте спра-

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty, \quad M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/n} < +\infty.$$

П. Камсен [2] узагальнив цей результат на випадок цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp s \lambda_n, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками λ_n . Він показав, що якщо

$$0 < h \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq H < +\infty \quad (n \geq 0) \quad (2)$$

і

$$\kappa_n(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln |a_n| - \ln |a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \uparrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

то для того, щоб

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho\sigma} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty, \quad M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}, \quad (3)$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/\lambda_n} < +\infty. \quad (4)$$

Ю.М. Галь і М.М. Шеремета [3] перенесли результат Камсена на ряди Діріхле, абсолютно збіжні в півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$. Вони показали, що якщо ряд Діріхле має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$ і виконується умова (2), то для того, щоб

$$\int_{-1}^0 |\sigma|^{\rho-1} \ln^+ M(\sigma, F) d\sigma < +\infty, \quad 0 < \rho < +\infty, \quad (5)$$

необхідно, а у випадку, коли $\kappa_n(F) \uparrow 0$, $n \rightarrow \infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\lambda_n} \right)^{\rho+1} < +\infty. \quad (6)$$

В [3] показано також, що якщо ряд Діріхле має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$ і виконується умова (2), то для того щоб

$$\int_{-1}^0 \ln^+ \ln^+ M(\sigma, F) d\sigma < +\infty,$$

$$\int_{\sigma_0}^0 \alpha(\ln M(\sigma, F)) d\sigma < +\infty,$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\lambda_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\lambda_n) - \alpha(\lambda_{n-1})}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} - \frac{\alpha(\lambda_{n+1}) - \alpha(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) \ln^+ |a_n| < +\infty.$$

3. Дві наступні теореми описують дещо інші класи збіжності.

Теорема 8. Нехай функції α і β такі, як в теоремі 1, але замість (7) виконується умова

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} dx < +\infty. \quad (11)$$

Припустимо, що показники цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову $\ln n = O(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, а послідовність $(\lambda_n(F))$ неспадна. Тоді для того щоб

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} \frac{\beta(\sigma)}{\alpha(\ln M(\sigma, F))} d\sigma < +\infty,$$

необхідно, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha(\lambda_{n-1})} - \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \right) \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) < +\infty, \quad \beta_2(x) = \int_{x_0}^x \beta(\sigma) d\sigma.$$

Теорема 9. Нехай функція α така, як в теоремі 1, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови (11) і $x\beta'(x)/\beta(x) + 2 \geq h > 0$, $x \in [x_0, +\infty)$. Припустимо, що показники абсолютно збіжного в півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ ряду Діріхле (1) задовольняють умову (8), а послідовність $(\lambda_n(F))$ неспадна. Тоді для того щоб

$$\int_{\sigma_0}^0 \frac{\beta(1/|\sigma|)}{|\sigma|^2 \alpha(\ln^+ M(\sigma, F))} d\sigma < +\infty,$$

необхідно, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha(\lambda_{n-1})} - \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \right) \beta_2 \left(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|} \right) < +\infty.$$

1. Valiron C. General theory of integral functions. - Toulouse, 1923. - 382 p.
2. Kamthan P.K. A theorem of step functions. II // Istanbul univ. fen. fac. mesm. A. - 1963. - 28. - P. 65-69.
3. Галь Ю.М., Шеремета М.Н. Принадлежность аналитических функций классу сходимости // Докл. АН УССР, Сер. А. - 1985. - № 7. - С. 11-14.
4. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Д., Поля Г. Неравенства. - М.: Изд-во иностр. лит., 1948 - 456 с.
5. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. - 1967. - № 2. - С. 100-108.

Дрогобицький педагогічний інститут ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 03.11.98