

14. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАНИЦЬ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЕРНЕНИХ ЧИСЕЛ

І.І. Бородавко

В.О. Бородін

Національний університет харчових технологій

Електронні обчислюванні машини можуть виконувати тільки одну арифметичну операцію – додавання. Вивчається машинний алгоритм знаходження оберненого числа для довільного додатного числа c за допомогою границь.

Розглянемо для довільного числа x_0 , $0 < x_0 < 1$ послідовність x_n , яка визначається рекурентним співвідношенням:

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n).$$

Доведемо методом математичної індукції що послідовність x_n зростає і обмежена 1, тобто

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1.$$

Маємо: 1) Оскільки $2 - x_n > 1$, то $x_{n+1} > x_n$

$$2) x_{n+1} = x_n(2 - x_n) = 2x_n - x_n^2 = 1 - (1 - x_n)^2 < 1.$$

Послідовність $\{x_n\}$ зростає і обмежена, то існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Переходимо до границі в рекурентній формулі маємо: $a = a(2 - a)$.

Звідки або $a = 0$ (не підходить) або $a = 1$.

Нехай c -довільне додатне число, покладемо $x_n = c y_n$. Тоді рекурентне співвідношення для y_n набуває вигляд

$$y_{n+1} = y_n(2 - c y_n).$$

Беручи початкове значення y_0 при умові $0 < y_0 < \frac{1}{c}$ одержимо, що y_n монотонно

зростає і прямує до $\frac{1}{c}$: $y_n = \frac{x_n}{c} \rightarrow \frac{1}{c}$.

Показано що y_n швидко прямує до оберненого числа.