

## The use of functions for mathematical modeling of transient processes

Ganna Sergeieva, Tetiana Zinchenko

National University of food technologies, Kyiv, Ukraine

### ABSTRACT

#### Keywords:

Function  
Statistic  
Least squares  
Linear  
Exponential

#### Article history:

Received 23.06.2013  
Received in revised form  
29.07.2013  
Accepted 04.09.2013

#### Corresponding author:

Ganna Sergeieva  
E-mail:  
ann.94\_94@mail.ru

**Introduction.** The use of non-linear special functions is actual for the mathematical modeling of processes. If it is necessary to obtain the mathematical model of a particular variable processes according to the sum-total of statistical data, then the quality of the model greatly depends on the chosen form function, whose unknown parameters can be estimated, for example, by the method of least square method.

**Methods.** Methods of mathematical modeling is applied.

**Results.** We offer function whose reduction makes it possible to obtain linear dependence in relation to elementary functions of unknown parameters. Nonlinear functions that can be used to describe a monotonically increasing or monotonically decreasing character of dependence of the qualitative value of the process from the variable factors are examined, including those that have a point of change of their nature of the convexity (inflection point). The way of calculation of the characteristics of such functions using the method of the least squares is shown, in the case, if the obtained  $n$  discrete values of  $x$  correspond to the obtained  $n$  values of  $y$ . A comparative analysis of the approximation quality of the analytical functional dependency of the resulting value of  $y$  from the variable value  $x$  by functions of different types was conducted.

УДК 517 (07)

## Застосування функцій для математичного моделювання перехідних процесів

Ганна Сергєєва, Тетяна Зінченко

Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна



## Вступ

Важливою проблемою економіки є правильне прогнозування певної реальної ситуації, в якій відбувається досліджуваний економічний процес, а також знаходження таких важелів впливу на цей процес, за допомогою яких він розвивався б необхідним чином. При дослідженні різних процесів для створення їх математичних моделей інколи виникає необхідність одержати функціональну аналітичну залежність результуючої величини  $y$  від змінної величини  $x$ , якщо одержано  $n$  дискретних значень величини  $x$  і відповідні їм  $n$  значень величини  $y$ .

## Матеріали та методи

Застосовано метод математичного моделювання.

## Результати та обговорення

Розглянуто функції, за допомогою яких можна описати монотонно зростаючий чи монотонно спадний характер залежності якісної ознаки досліджуваного процесу від змінних факторів.

Результати таких спостережень можуть бути подані в таблиці

|     |       |       |         |       |
|-----|-------|-------|---------|-------|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_n$ |

За даними таблиці необхідно визначити вигляд функціональної залежності між  $x$  та  $y$ , тобто від табличної форми функціональної залежності перейти до аналітичної у вигляді деякої функції  $y = f(x)$ .

Розв'язування цієї задачі розподіляють на два етапи. Спочатку, використовуючи графічне представлення точок  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , обирають форму залежності між  $x$  та  $y$ : лінійну  $y = ax + b$ , параболічну  $y = ax^2 + bx + c$ , гіперболічну  $y = \frac{a}{x} + b$ , показникову  $y = a^x + b$ , експоненціальну  $y = e^{ax+b}$ , чи якусь іншу, де  $a, b, c$  - невідомі параметри. В загальному випадку можна вважати  $f(x_i) = f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , де  $a_1, a_2, \dots, a_m$  - невідомі параметри. Їх значення визначають на другому етапі, мінімізуючи суму квадратів відхилень спостережуваних табличних значень  $y_i$  від значень шуканої функції  $f(x_i)$ :

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

Необхідна умова існування екстремуму функції  $S$  - рівність нулю частинних похідних:  $\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Ця умова є системою  $m$  рівнянь з  $m$  невідомими.

Розв'язок цієї системи визначає функцію  $y = f(x)$ , яка забезпечує найменше значення величини  $S$ .

Для лінійної форми залежності між  $x$  та  $y$ :  $y = ax + b$  система рівнянь для визначення параметрів  $a, b$  має вигляд:



$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - bn = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot \overline{x^2} + b \cdot \overline{x} = \overline{xy}; \\ a \cdot \overline{x} + b = \overline{y}, \end{cases}$$

де використано позначення:  $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ;  $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ ;  $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ;

$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ . Розв'язок системи рівнянь можна отримати за правилом Крамера:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}; \quad b = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \quad \text{або} \quad b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}. \quad (2)$$

**Приклад 1.** Одержано дані залежності між випадковою величиною  $X$  та випадковою величиною  $Y$ :

|   |     |      |      |     |      |      |      |      |
|---|-----|------|------|-----|------|------|------|------|
| X | 2.3 | 3.1  | 2.9  | 3.5 | 4.2  | 3.9  | 4.7  | 4.5  |
| Y | 19  | 18.5 | 18.7 | 18  | 17.2 | 17.5 | 16.4 | 16.6 |

Вважаючи характер залежності між ознаками  $X$  та  $Y$  лінійним, знайти за методом найменших квадратів аналітичний вигляд відповідної функції, яка відображає цю залежність.

*Розв'язання.* Зобразимо точки з координатами  $(x_i, y_i)$  в прямокутній системі координат (рис.1). Одержане поле точок дозволяє припустити існування лінійної залежності між величинами  $x$  та  $y$ , тобто  $y = ax + b$ , де  $a$  і  $b$  визначаються.

Виконаємо підрахунки:

$$\overline{x} = \frac{2.3 + 3.1 + 2.9 + 3.5 + 4.2 + 3.9 + 4.7 + 4.5}{8} \approx 3.64;$$

$$\overline{y} = \frac{19 + 18.5 + 18.7 + 18 + 17.2 + 17.5 + 16.4 + 16.6}{8} \approx 17.74;$$

$$\overline{xy} = \frac{2.3 \cdot 19 + 3.1 \cdot 18.5 + 2.9 \cdot 18.7 + 3.5 \cdot 18 + 4.2 \cdot 17.2 + 3.9 \cdot 17.5 + 4.7 \cdot 16.4 + 4.5 \cdot 16.6}{8} \approx 63.82;$$

$$\overline{x^2} = \frac{2.3^2 + 3.1^2 + 2.9^2 + 3.5^2 + 4.2^2 + 3.9^2 + 4.7^2 + 4.5^2}{8} \approx 13.85;$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \frac{63.82 - 3.64 \cdot 17.74}{13.85 - 3.64^2} \approx -\frac{0.754}{0.6} \approx -1.26;$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} = 17.74 + 1.26 \cdot 3.64 \approx 22.33.$$



Отже, лінійна залежність між величинами  $x$  та  $y$ :  $y = -1.26x + 22.33$ . Графіком цієї залежності є пряма лінія, яку можна побудувати за двома точками:  $x_1 = 2; y_1 = 19.8$ ;  $x_2 = 5; y_2 = 16$ .

**Приклад 2.** Величини  $X$  та  $Y$  задані таблицею:

|     |     |     |     |      |      |      |      |      |      |
|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| $X$ | 1.7 | 4.3 | 6.8 | 10.0 | 12.0 | 15.0 | 15.8 | 17.2 | 18.0 |
| $Y$ | 3.2 | 3.0 | 5.1 | 4.3  | 9.0  | 9.2  | 11.5 | 13.6 | 13.2 |

Знайти аналітичну залежність між  $x$  та  $y$ .

Зобразимо точки з координатами  $(x_i, y_i)$  в прямокутній системі координат (рис.2). Одержане поле точок дозволяє припустити існування лінійної залежності між величинами  $x$  та  $y$ , тобто  $y = ax + b$ , де  $a$  і  $b$  визначаються за формулами (2). Виконаємо підрахунки середніх арифметичних значень:

$$\bar{x} = \frac{100.8}{9} \approx 11.2; \quad \bar{y} = \frac{72.1}{9} \approx 8.01; \quad \overline{xy} = \frac{995.24}{9} \approx 110.58; \quad \overline{x^2} = \frac{1406}{9} \approx 156.23;$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \approx 0.68; \quad b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} \approx 0.43$$

Отже, лінійна залежність між величинами  $x$  та  $y$ :  $y = 0.68x + 0.43$ .

Обчислимо суму квадратів відхилень табличних значень  $y_i$  від значень знайденої функції  $f(x_i) = 0.68x_i + 0.43$  за формулою за формулою (2):

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^9 (y_i - 0.68x_i - 0.43)^2 \approx 16.08.$$

Середнє квадратичне відхилення експериментальних точок  $y_i$  від значень

$$\text{функції } f(x_i) \text{ дорівнює: } \sigma_1 = \sqrt{\frac{S}{n}} = \sqrt{\frac{16.08}{9}} \approx 1.34.$$

Для зменшення похибок наближення можна вибрати інший характер функції, наприклад, експоненціальний  $y = e^{ax+b}$ . Для спрощення задачі обчислення невідомих параметрів  $a, b$  експоненціальну функцію варто прологарифмувати та ввести до розгляду нову функцію  $Z$ :

$$\ln y = \ln(e^{ax+b}) = ax + b, \quad z = \ln y = ax + b. \quad (3)$$

З таблиці даних  $X, Z$  можна отримати таблицю даних  $X, Z$ :

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $X$ | 1.7  | 4.3  | 6.8  | 10.0 | 12.0 | 15.0 | 15.8 | 17.2 | 18.0 |
| $Z$ | 1.16 | 1.10 | 1.63 | 1.46 | 2.20 | 2.22 | 2.44 | 2.61 | 2.58 |

За підрахунками середніх арифметичних значень отримуємо:



— Економіка та управління —

$$\bar{x} = \frac{100.8}{9} \approx 11.2; \quad \bar{z} = \frac{17.40}{9} \approx 1.934; \quad \overline{xz} = \frac{221.975}{9} \approx 24.664; \quad \overline{x^2} = \frac{1406}{9} \approx 156.23;$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \approx 0.1; \quad b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} \approx 0.84.$$

Отже, експоненціальна залежність між величинами  $x$  та  $y$ :  $y = e^{0.1x+0.84}$ .

Обчислимо суму квадратів відхилень табличних значень  $y_i$  від значень знайденої функції  $f(x_i) = e^{0.1x_i+0.84}$  за формулою (1): Середнє квадратичне відхилення експериментальних точок  $y_i$  від значень функції  $f(x_i)$  дорівнює:

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{S}{n}} = \sqrt{\frac{9.06}{9}} \approx 1.0.$$

Очевидно,  $\sigma_2 < \sigma_1$ , тобто, експоненціальна функція краще наближує робочий масив даних, ніж лінійна функція.

Криві спадного характеру можна наближувати функціями виду:

$$y(x) = a \cdot x^b \cdot e^{cx}, \quad x \geq 0, \quad 0 < b < 1, \quad c < 0 \quad (4)$$

Графіки цих функцій представлені на рис.3. Для зручності обчислень замість функції (4) розглядаємо функцію:

$$z = \ln y = \ln a + b \cdot \ln x + c \cdot x = f(x), \quad (5)$$

де  $a, b, c$  - невідомі параметри. Цільова функція суми квадратів відхилень спостережуваних табличних значень  $y_i$  від значень шуканої функції  $f(x_i)$  дорівнює

$$S = \sum_{i=1}^n (z_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - \ln a - b \ln x_i - cx_i)^2. \quad (6)$$

Система трьох рівнянь з трьома невідомими  $a, b, c$  складена за умови рівності нулю частинних похідних першого порядку, після перетворень набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0; & n \cdot \ln a + b \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n z_i, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0; & \Rightarrow \begin{cases} \ln a \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i + b \cdot \sum_{i=1}^n \ln^2 x_i + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i = \sum_{i=1}^n z_i \ln x_i, \\ \ln a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i x_i. \end{cases} \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0; & \end{cases}$$

Параметри  $a, b, c$  є розв'язком системи рівнянь, лінійної відносно  $\ln a, b, c$ :

$$\begin{cases} \ln a + b \cdot s_I + c \cdot s_X = s_Z, \\ \ln a \cdot s_I + b \cdot s_{II} + c \cdot s_{XI} = s_{ZI}, \\ \ln a \cdot s_X + b \cdot s_{XI} + c \cdot s_{XX} = s_{ZX}, \end{cases} \quad (7)$$

де

$$s_X = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_I = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad s_Z = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n z_i, \quad s_{ZX} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n z_i x_i,$$

$$s_{XI} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln x_i, \quad s_{II} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln^2 x_i, \quad s_{ZI} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n z_i \ln x_i.$$



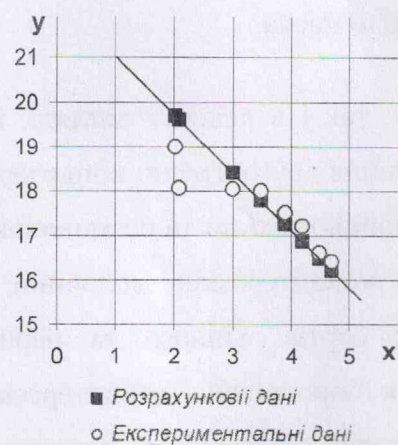
Систему (7) можна розв'язати за правилом Крамера, для цього необхідно обчислити визначники 3-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & s_I & s_x \\ s_I & s_{II} & s_{xI} \\ s_x & s_{xI} & s_{xx} \end{vmatrix}, \Delta_{\ln a} = \begin{vmatrix} s_z & s_I & s_x \\ s_{zI} & s_{II} & s_{xI} \\ s_{zx} & s_{xI} & s_{xx} \end{vmatrix}, \Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & s_z & s_x \\ s_I & s_{zI} & s_{xI} \\ s_x & s_{zx} & s_{xx} \end{vmatrix}, \Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & s_I & s_z \\ s_I & s_{II} & s_{zI} \\ s_x & s_{xI} & s_{zx} \end{vmatrix}.$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta}; \quad c = \frac{\Delta_c}{\Delta}; \quad \ln a = \frac{\Delta_{\ln a}}{\Delta}; \quad a = e^{\ln a}. \quad (8)$$

**Приклад 3.** Для значень величин  $X$  та  $Y$ , заданих в таблиці, знайти функцію типу (4):

|     |     |      |      |      |     |      |      |      |      |       |       |
|-----|-----|------|------|------|-----|------|------|------|------|-------|-------|
| $X$ | 0.1 | 0.5  | 1    | 1.5  | 2   | 3    | 4    | 6    | 8    | 10    | 12    |
| $Y$ | 1.5 | 2.75 | 3.03 | 2.89 | 2.6 | 1.93 | 1.35 | 0.61 | 0.26 | 0.107 | 0.043 |



**Рис.1.** Поле даних випадкових величин  $X, Y$  (приклад 1)



**Рис.2.** Поле даних випадкових величин  $X, Y$  (приклад 2)

Виконуємо обчислення та заповнюємо таблицю:

| №             | $x_i$ | $y_i$ | $z_i = \ln y_i$ | $x_i^2$  | $\ln x_i$ | $x_i \ln x_i$ | $\ln^2 x_i$ | $z_i x_i$ | $z_i \ln x_i$ |
|---------------|-------|-------|-----------------|----------|-----------|---------------|-------------|-----------|---------------|
| 1             | 0.1   | 1.5   | 0.405           | 0.01     | -2.3      | -0.23         | 5.3         | 0.04      | -0.934        |
| 2             | 0.5   | 2.75  | 1.01            | 0.25     | -0.69     | -0.347        | 0.48        | 0.506     | -0.7          |
| 3             | 1     | 3.03  | 1.11            | 1        | 0         | 0             | 0           | 1.11      | 0             |
| 4             | 1.5   | 2.89  | 1.06            | 2.25     | 0.405     | 0.608         | 0.164       | 1.59      | 0.43          |
| 5             | 2     | 2.6   | 0.956           | 4        | 0.69      | 1.386         | 0.48        | 1.91      | 0.663         |
| 6             | 3     | 1.93  | 0.66            | 9        | 1.1       | 3.3           | 1.21        | 1.98      | 0.724         |
| 7             | 4     | 1.35  | 0.303           | 16       | 1.386     | 5.55          | 1.92        | 1.21      | 0.42          |
| 8             | 6     | 0.61  | -0.5            | 36       | 1.79      | 10.751        | 3.2         | -2.97     | -0.89         |
| 9             | 8     | 0.26  | -1.35           | 64       | 2.08      | 16.64         | 4.324       | -10.8     | -2.81         |
| 10            | 10    | 0.107 | -2.24           | 100      | 2.303     | 23.03         | 5.3         | -22.4     | -5.16         |
| 11            | 12    | 0.043 | -3.15           | 144      | 2.49      | 29.82         | 6.175       | -37.8     | -7.82         |
| $\Sigma$      | 48.1  | 17.07 | -1.731          | 376.5    | 9.25      | 90.5          | 28.55       | -65.6     | -16.07        |
| $(1/n)\Sigma$ | 4.37  | 1.55  | -0.157          | 34.23    | 0.84      | 8.23          | 2.6         | -5.96     | -1.46         |
|               | $s_x$ | $s_y$ | $s_z$           | $s_{xx}$ | $s_I$     | $s_{xI}$      | $s_{II}$    | $s_{zx}$  | $s_{zI}$      |

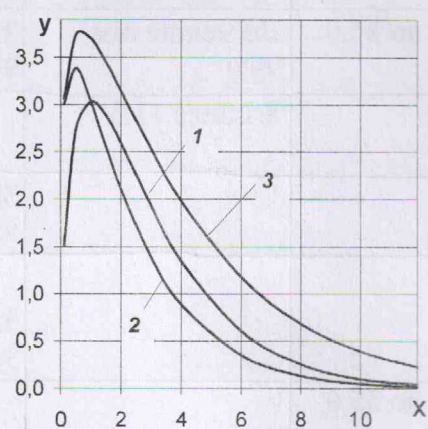


$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0.84 & 4.37 \\ 0.84 & 2.6 & 8.23 \\ 4.37 & 8.23 & 34.23 \end{vmatrix} \approx 7.87; \quad \Delta_{\ln a} = \begin{vmatrix} -0.157 & 0.84 & 4.37 \\ -1.46 & 2.6 & 8.23 \\ -5.96 & 8.23 & 34.23 \end{vmatrix} \approx 12.67;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & -0.157 & 4.37 \\ 0.84 & -1.46 & 8.23 \\ 4.37 & -5.96 & 34.23 \end{vmatrix} \approx 3.95; \quad \Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 0.84 & -0.157 \\ 0.84 & 2.6 & -1.46 \\ 4.37 & 8.23 & -5.96 \end{vmatrix} \approx -3.94.$$

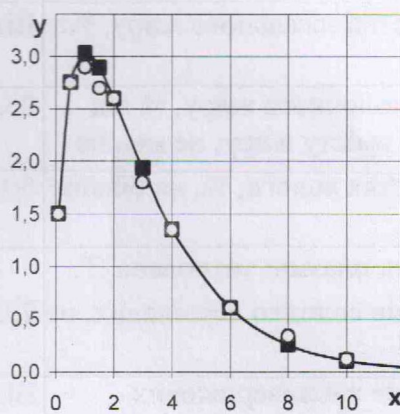
$$\ln a = \frac{12.67}{7.87} \approx 1.61; \quad a = e^{1.61} \approx 5.0; \quad b = \frac{3.95}{7.87} \approx 0.5; \quad c = -\frac{3.94}{7.87} \approx -0.5.$$

Функція має вигляд:  $y = a \cdot x^b \cdot e^{cx} = 5 \cdot x^{0.5} e^{-0.5x}$ . Графік цієї функції представлено на рис.4.



- 1 -  $b=0.5, c=-0.5$
- 2 -  $b=0.2, c=-0.5$
- 3 -  $b=0.2, c=-0.3$

Рис. 3. Графіки функцій  $y = a \cdot x^b \cdot e^{cx}$ .



- Розрахункові дані
- Експериментальні дані

Рис. 4. Графік функції (приклад 3), отриманий за методом найменших квадратів.

### Висновки

За допомогою методу мінімальних квадратів розглянуто приклади розрахунку нелінійних функцій, які можуть бути використані для створення математичних моделей процесів, що мають нелінійний характер.

Такі математичні моделі можуть бути використані для прогнозування досліджуваних процесів.



# Література

1. Efsthios Z. Panagou, Fady R. Mohareb, Anthoula A. Argyri, Conrad M. Bessant, George-John E. Nychas. A comparison of artificial neural networks and partial least squares modelling for the rapid detection of the microbial spoilage of beef fillets based on Fourier transform infrared spectral fingerprints / *Food Microbiology*, Vol. 28, Issue 4, 2011, Pp. 782-790
2. Karel J. Keesman, Timo G. Doeswijk. Direct least-squares estimation and prediction of rational systems: Application to food storage / *Journal of Process Control*, Vol. 19, Issue 2, 2009, Pp. 340-348
3. Dragan Jukić. A necessary and sufficient criteria for the existence of the least squares estimate for a 3-parametric exponential function / *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 147, Issue 1, 2004, Pp. 1-17.
4. Gavva O., Krivoplyas-Volodina L. Methodological aspects of the mathematical theory of friction it is applicable to bearing surfaces of overload devices / *Journal of Food and Packaging Science, Technique and Technologies*. – 2013. - 2(2). - Pp. 189-193.
5. Masoud Shariati-Rad, Mohsen Irandoust, Niloufar Amin, Mojtaba Shamsipur. Solving matrix effect, spectral interferences and nonlinearity by generalized standard addition method coupled with radial basis functions-partial least squares: Application to simultaneous determination of drugs in urine / *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, Vol. 120, 2013, Pp. 77-83
6. Gabriela Jager, Angela Kunoth, Wolf-Dieter Schuh. Approximate continuation of harmonic functions in geodesy: A spline based least squares approach with regularization / *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 237, Issue 1, 2013, Pp. 62-82
7. Bultheel, M. Van Barel, P. Van gucht. Orthogonal basis functions in discrete least-squares rational approximation / *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 164–165, 2004, Pp. 175-194
8. Thomas Most, Christian Bucher. New concepts for moving least squares: An interpolating non-singular weighting function and weighted nodal least squares / *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, Issue 6, 2008, Pp. 461-470
9. S. Chen, X. Hong, C.J. Harris, L. Hanzo. Fully complex-valued radial basis function networks: Orthogonal least squares regression and classification / *Neurocomputing*, Vol. 71, Is. 16–18, 2008, Pp. 3421-3433
10. Jun Liu. Least square based method for obtaining one-particle spectral functions from temperature Green functions / *Computer Physics Communications*, Vol. 184, Is. 2, 2013, Pp. 367-373

# References

1. Efsthios Z. Panagou., Fady R. Mohareb., Anthoula A. Argyri., Conrad M. Bessant., George-John E. Nychas. (2011). A comparison of artificial neural networks and partial least squares modelling for the rapid detection of the microbial spoilage of beef fillets based on Fourier transform infrared spectral fingerprints, *Food Microbiology*, 28(4), pp. 782-790.
2. Karel J. Keesman., Timo G. Doeswijk. (2009). Direct least-squares estimation and prediction of rational systems: Application to food storage, *Journal of Process Control*, 19(2), pp. 340-348.
3. Dragan Jukić. (2004). A necessary and sufficient criteria for the existence of the least squares estimate for a 3-parametric exponential function, *Applied Mathematics and Computation*, 147(1), pp. 1-17.
4. Gavva O., Krivoplyas-Volodina L. (2013). Methodological aspects of the mathematical theory of friction it is applicable to bearing surfaces of overload devices, *Journal of Food and Packaging Science, Technique and Technologies*, 2(2), pp. 189-193.
5. Masoud Shariati-Rad, Mohsen Irandoust, Niloufar Amin, Mojtaba Shamsipur. (2013). Solving matrix effect, spectral interferences and nonlinearity by generalized standard addition method coupled with radial basis functions-partial least squares: Application to simultaneous determination of drugs in urine, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 120, pp. 77-83.
6. Gabriela Jager., Angela Kunoth., Wolf-Dieter Schuh. (2013). Approximate continuation of harmonic functions in geodesy: A spline based least squares approach with regularization, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 237(1), pp. 62-82.
7. A. Bultheel, M. Van Barel, P. Van Gucht. (2004). Orthogonal basis functions in discrete least-squares rational approximation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164-165, pp. 175-194.



— Економіка та управління —

8. Thomas Most, Christian Bucher. (2008). New concepts for moving least squares: An interpolating non-singular weighting function and weighted nodal least squares, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(6), pp. 461-470.
9. S. Chen, X. Hong, PP.J. Harris, L. Hanzo. (2008). Fully complex-valued radial basis function networks: Orthogonal least squares regression and classification. *Neurocomputing*, 71(16-18), pp. 3421-3433.
10. Jun Liu. (2013). Least square based method for obtaining one-particle spectral functions from temperature Green functions, *Computer Physics Communications*, 184(2), pp. 367-373.