

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

**Л.В. МАЗНИК
Т.В. БЕРЕЗЯНКО
О.В. БЕЗПАЛЬКО
А.Д. БЕРГЕР
Ю.М. ГРИНЮК
О.І. ДРАГАН
О.М. ОЛІЙНИЧЕНКО**

**ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ
МЕТОДИ І МОДЕЛІ В ГАЛУЗІ
УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Київ НУХТ 2019

УДК 005.311.12.519.863:331.03

*Рекомендовано Вченою Радою
Національного університету харчових технологій
як навчальний посібник для студентів закладів вищої освіти
(протокол № 9 від «25» квітня 2019 р.)*

Рецензенти:

Гривківська О.В., доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економіки Європейського університету;

Ільєнко О.В., доктор економічних наук, доцент, завідувач кафедри менеджменту зовнішньоекономічної діяльності Національного авіаційного університету;

Соломянюк Н.М., доктор економічних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри маркетингу Національного університету харчових технологій.

Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом: навчальний посібник: /Л.В. Мазник, Т.В. Березянко, О.В. Безпалько, А.Д. Бергер, Ю.М. Гринюк, О.І. Драган, О.М. Олійниченко. [Заг. редакцією Л.В. Мазник]. – К. : Кафедра, 2019. – 290 с.

ISBN 978-617-7301-67-6

Навчальний посібник відрізняється збалансованістю та зрозумілістю викладу матеріалу. Тематична композиція навчального посібника та його практичні завдання у формі тестів, розрахункових вправ, спрямовані на впровадження прикладних методик економіко-математичного моделювання для застосування на практиці, сприяє розвитку аналітично-розрахункових здібностей і готує до прийняття самостійних рішень в управлінні персоналом.

Навчальний посібник призначено для здобувачі закладів вищої освіти для самостійного вивчення дисципліни «Економіко-математичне моделювання». Посібник буде корисним для тих, хто цікавиться сучасними проблемами управління персоналом для розв'язання, яких застосовуються прикладні методи і моделі економіко-математичного моделювання.

УДК 005.311.12.519.863:331.03

ISBN 978-617-7301-67-6

© Безпалько О.В., Бергер А.Д., Березянко Т.М.,
Гринюк Ю.М., Драган О.І., Мазник Л.В.,
Олійниченко О.М., 2019
© Кафедра, 2019

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
ТЕМА 1. ПРЕДМЕТ, МЕТОД І ЗАДАЧІ КУРСУ	8
1.1 Основні категорії математичного моделювання.....	8
1.2 Моделювання в економіці та його використання в розвитку та формалізації економічної теорії.....	10
1.3 Теоретичні основи математичного моделювання та класифікація моделей	11
1.4 Математична модель та її основні елементи.....	12
1.5 Принципи та етапи побудови моделей.....	13
 ТЕМА 2. МОДЕЛІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.....	 21
2.1 Постановка задач лінійного програмування, їх моделі та основні форми...	21
2.2 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	27
2.3 Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	29
 ТЕМА 3. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА КІЛЬКІСНИЙ АНАЛІЗ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ РОЗРАХУНКІВ.....	 41
3.1 Двоїстість у задачах лінійного програмування.....	41
3.2 Основні теореми двоїстості.....	43
3.3 Двоїстий симплекс-метод.....	44
3.4 Економіко-математичний аналіз оптимізаційних розрахунків.....	44
 ТЕМА 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА.....	 54
4.1 Постановка транспортної задачі та її математична модель.....	54
4.2 Методи побудови початкового опорного плану.....	56
4.3 Метод потенціалів.....	59
4.4 Практичне застосування транспортної задачі. Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів банку. Модель оптимізації штатного розпису фірми.....	66
 ТЕМА 5. ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ.....	 73
5.1 Постановка задачі цілочислового лінійного програмування.....	73
5.2 Методи розв'язування задач цілочислового лінійного програмування.....	74
5.3 Прикладні моделі задач цілочислового лінійного програмування.....	78
 ТЕМА 6. НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ.....	 85
6.1 Постановка задачі нелінійного програмування та її характерні особливості.....	85
6.2 Основні види задач нелінійного програмування.....	86
6.3 Прикладне використання методу множників Лагранжа.....	87
 ТЕМА 7. ДИНАМІЧЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	 92

7.1 Постановка задачі динамічного програмування.....	92
7.2 Методи розв'язування задач динамічного програмування.....	93
7.3 Прикладні моделі динамічного програмування.....	94
ТЕМА 8. ОСНОВИ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....	104
8.1 Економетрична модель.....	104
8.2 Основні етапи економетричного моделювання.....	105
8.3 Зміст змінних і рівнянь в економетричній моделі.....	105
8.4 Класифікація рівнянь регресії.....	108
8.5 Класифікація економіко-математичних моделей.....	109
ТЕМА 9. МЕТОДИ ПОБУДОВИ ЗАГАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ.....	113
9.1 Прості лінійні регресійні моделі.....	113
9.2 Оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними моделі.....	117
9.3 Оцінка точності моделі.....	120
9.4 Перевірка значущості та довірчі інтервали.....	121
9.5 Прогнозування за лінійною моделлю.....	123
ТЕМА 10. МЕТОДИ ПОБУДОВИ НЕЛІНІЙНИХ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	133
10.1 Види рівнянь регресії.....	133
10.2 Економетричні моделі парної регресії.....	134
10.3 Алгоритми побудови моделей.....	135
ТЕМА 11. МЕТОДИ ПОБУДОВИ МНОЖИННИХ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	140
11.1 Множинна регресія.....	140
11.2 Матрична форма економетричної моделі.....	141
11.3 Оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у множинній регресії....	141
11.4 Значимість коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії.....	146
11.5 Виробнича функція Кобба-Дугласа.....	158
11.6 Моделі попиту та пропозиції.....	162
ТЕМА 12. ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗА МНК. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ ТА МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ.....	171
12.1 Умови оцінки параметрів економетричної моделі за допомогою МНК.....	171
12.2 Поняття гомо- і гетероскедастичності.....	172
12.3 Тестування наявності гетероскедастичності.....	172
12.4 Поняття мультиколінеарності.....	175
12.5 Наслідки мультиколінеарності.....	175
12.6 Ознаки мультиколінеарності.....	175
12.7 Визначення наявності мультиколінеарності.....	175

ТЕМА 13. ОСНОВНІ ЗАСАДИ ЯКІСНОГО ТА КІЛЬКІСНОГО АНАЛІЗУ РИЗИКУ.....	
13.1 Категорії «ризик» та «невизначеність. Елементи ризику. Причини виникнення невизначеності. Причини виникнення ризику. Класифікація ризику.....	187
13.2 Кількісний аналіз ризику.....	187
13.3 Система кількісних оцінок ступеня ризику.....	190
	195
ТЕМА 14. УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ.....	
14.1 Основні підходи до управління ризиком.....	217
14.2 Інваріантні способи зниження ступеня ризику.....	217
14.3 Таблиця рішень.....	218
	223
ТЕМА 15. МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ.....	
15.1 Теоретико-ігрова модель прийняття рішень в умовах невизначеності. Функція ризику.....	228
15.2 Критерії прийняття рішень при заданому розподілі ймовірностей.....	228
15.3 Критерії прийняття рішень при невідомому розподілі ймовірностей.....	230
15.4 Критерії прийняття рішень у ситуації, що характеризується антагоністичними інтересами середовища.....	231
15.5 Шоста інформаційна ситуація. Застосування критерію прийняття рішення між випадками крайнього песимізму та крайнього оптимізму.....	232
	233
ТЕМА 16. СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ БАГАТОВИМІРНИХ ДАНИХ.....	
16.1 Багатовимірні статистичні методи як інструмент економічних досліджень.....	241
16.2 Використання методик інтегрального оцінювання в сфері управління персоналом.....	241
16.3 Таксономічний аналіз. Методика розрахунку таксономічного показника..	242
16.4 Сутність та алгоритм проведення кластерного аналізу як багатовимірної статистичної процедури.....	250
	255

ВСТУП

Змістовна частина навчального посібника «Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом» побудована за окремими темами, які в цілому охоплюють програму курсу:

- предмет, метод і задачі курсу;
- моделі задач лінійного програмування та методи їх розв'язування;
- теорія двоїстості та кількісний аналіз оптимізаційних розрахунків;
- транспортна задача;
- задачі цілочислового лінійного програмування та методи їх розв'язання;
- нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем;
- динамічне програмування;
- економетричне моделювання;
- аналіз, моделювання та управління ризиком;
- багатовимірні статистичні методи.

Предметом дисципліни «Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом» – є постановка і вирішення економіко-управлінських задач для народного господарства, його ланок і елементів на основі оптимізаційних методів, економетричних моделей математичного моделювання, теорії ризикології, багатовимірних статистичних методів з використанням спеціальних комп'ютерних програм.

Метою викладання навчальної дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі в галузі управління персоналом» є формування у здобувачів системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей в економіці, управлінні персоналом, фінансах. Вивчення цієї дисципліни дозволяє надати студентам комплекс знань по постановці і вирішенню економіко-управлінських задач для народного господарства, його ланок і елементів на основі методів ризикології, дослідження операцій, оптимізаційних та економетричних моделей математичного моделювання з використанням сучасної обчислювальної техніки; навчити студентів аналізувати результати вирішення задач і приймати на цій основі управлінські рішення та застосовувати на практиці основні види зазначених моделей.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом» є: вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови моделей, методів їх розв'язування та аналізу з метою використання в економіці; обов'язкове використання в управлінській діяльності кращих, передових досягнень науки, мистецтва і досвіду математичного моделювання для забезпечення ефективності та раціональності управління; надати студентам комплекс знань з: методик діагностування, аналізу, оцінювання стану керованого об'єкта, програмування, виробленню критеріїв оцінювання і моніторингу наслідків управлінських рішень; використання сучасного

програмного та апаратного забезпечення процесу створення економіко-математичних моделей.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми здобувачі повинні набути **здатності** отримувати компетентності:

інтегральні: розв'язувати складні спеціалізовані завдання та проблеми в галузі управління персоналом та економіки праці в сфері підприємництва, торгівлі та біржової діяльності або в процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів організації підприємницьких, торговельних, біржових структур і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

загальні:

- здатність застосовувати отримані знання в практичних ситуаціях;
- навички використання інформаційних і комунікаційних технологій;
- здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

фахові:

- здатність обирати та використовувати відповідні методи, інструментарій для обґрунтування рішень щодо створення, функціонування підприємницьких, торговельних і біржових структур;
- здатність визначати та оцінювати характеристики товарів і послуг, здатність до бізнес-планування, оцінювання кон'юнктури ринків і результатів діяльності у сфері підприємництва, торгівлі та біржової практики з урахуванням ризиків.

ТЕМА 1. ПРЕДМЕТ, МЕТОД І ЗАДАЧІ КУРСУ

- 1.1. Основні категорії математичного моделювання
- 1.2. Моделювання в економіці та його використання в розвитку та формалізації економічної теорії
- 1.3. Теоретичні основи математичного моделювання та класифікація моделей
- 1.4. Математична модель та її основні елементи
- 1.5. Принципи та етапи побудови моделей

1.1. Основні категорії математичного моделювання

Моделювання – процес побудови моделі, за допомогою якого вивчається функціонування об'єктів різної природи. Він складається з трьох основних елементів: суб'єкта, об'єкта дослідження та моделі, з допомогою якої суб'єкт пізнає об'єкт.

Моделювання – процес побудови, вивчення та використання моделей, який включає побудову абстракцій, аналогій, конструювання наукових гіпотез.

Модель – це такий матеріально або розумово зображуваний об'єкт, який у процесі дослідження замінює об'єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об'єкт; умовне зображення об'єкта, що певною мірою адекватно описує його функціональні характеристики, які істотно важливі для поставленої мети дослідження; інструмент кількісного аналізу певних явищ, крім того, застосування моделей розвивають інтелект і дають багато корисного для прийняття рішень.

Моделі управління поділяються на матеріальні (предметні) та ідеальні (змістовні). У класі матеріальних моделей найбільш характерні предметні (геометричні), фізичні та аналогові моделі. Предметні (геометричні) моделі призначені для аналізу тих якостей об'єкту, які визначаються його розмірами, формою, іншими ознаками, які характеризують об'єкт без урахування його внутрішньої природи. Фізичні моделі дозволяють вивчати властивості об'єкта або процесу із збереженням його фізичної природи або хімічних властивостей. Аналогові моделі відповідають тим же цілям, що й фізичні, але природа процесів, які використовуються в оригіналі та моделі різна. Основу аналогового моделювання складає подібність між математичними описами процесів оригіналу і моделі.

Клас ідеальних моделей об'єднує моделі, які відрізняються ступенем формалізації діяльності. Основним видом ідеальних моделей є знакові моделі, які використовують певну формалізовану мову. Важливими видами знакових моделей є словесно-описові, графічні та математичні. Словесно-описові є описанням властивостей реального або уявного об'єкта на звичайній мові. Графічні моделі залежно від призначення можна поділити на портретні та умовні. Графічна портретна модель – це модель, яка графічними засобами відображає реально або теоретично досліджені властивості, характеристики об'єкта. Графічна умовна модель призначена

для відображення графічного образу характеристик, властивостей об'єкта, які неможливо спостерігати.

Математичні моделі описують властивості системи, які забезпечують вирішення завдань, процесів на мові математики (функціональна та логічна залежність, алгебраїчні системи, диференційні рівняння, графічні структури тощо).

Математичне моделювання – метод дослідження, що заснований на аналогії процесів і явищ, різних за своєю природою, які описуються однаковими математичними залежностями. Математичні моделі поділяються на функціональні (кібернетичні) та структурні. Основна мета функціональних (кібернетичних) моделей – пізнання сутності об'єкта через найважливіші прояви цієї сутності: діяльність функціонування, поведінка, Внутрішня структура при цьому не вивчається, а інформація про структуру не використовується. Структурні моделі відображають внутрішню організацію об'єкта: його складові частини, внутрішні параметри, їх взаємозв'язок із «входом» і «виходом» тощо.

Опис математичної моделі виконується термінами кількісних характеристик-показників (змінних, невідомих), значення яких підлягає визначенню в процесі розв'язку задачі та параметрів, величини котрих апріорно відомі. Будь-яка модель задачі дослідження окремого класу включає в себе змінні, систему обмежень і мету. Мета – це цільова функція, яка задається на множині допустимих розв'язків D .

Критерієм оптимальності називається деякий показник, який має економічний зміст та служить способом формалізації конкретної мети керування і виражається за допомогою цільової функції через фактори моделі. Критерій оптимальності визначає розуміння змісту цільової функції. У деяких випадках в якості критерію оптимальності може виступати одна із вихідних характеристик об'єкта моделювання.

Цільова функція математично зв'язує між собою фактори моделі, і її значення визначається значеннями цих величин. Змістовне тлумачення цільовій функції надає тільки критерій оптимальності. Змінні стану визначають або допомагають визначити стан системи в будь-який момент часу. Прикладом таких змінних можуть бути обсяги продажу і прибуток. Змінні росту – характеристики, що описують процес, який протікає в системі в заданий момент часу. Досліджуваний процес можна кваліфікувати або як перетворення, або як переміщення. Додаткові змінні допомагають глибше вивчити об'єкт, а в окремих випадках спрощують співставлення результатів дослідження. Керовані змінні – входи моделі, значення котрих змінюється в часі незалежно від поведінки об'єкта дослідження. Зростання обсягів виробництва – результат керування зі сторони зовнішнім середовищем, дію якого на окремих стадіях можна розглядати як постійну величину. Керовану змінну можна представити як функцію залежну від часу.

Параметри та константи – це незалежні від часу економічні показники та нормативні коефіцієнти, які характерні для об'єкта і включаються до моделі через систему обмежень.

Система обмежень визначає границі існування області дійсних та допустимих розв'язків і характеризує основні зовнішні та внутрішні властивості об'єкта.

Рівняння зв'язку являються математичною формалізацією системи обмежень. Між поняттями «система обмежень» та «рівняння зв'язку» існує аналогія, як між поняттями «критерій оптимальності» та «цільова функція»: різні за змістом обмеження можуть описуватися однаковими рівняннями зв'язку, а одне і те ж саме обмеження в різних моделях може записуватись різними рівняннями зв'язку.

Розв'язком математичної моделі називається такий набір (сукупність) значень змінних, які задовольняють її рівняння зв'язку. Розв'язки, які мають економічний зміст, називаються структурно допустимими. Моделі, які мають багато розв'язків, називаються варіантними на відміну від без варіантних, які мають один розв'язок. Серед структурно допустимих варіантних розв'язків моделі, як правило, знаходиться один розв'язок, при якому цільова функція в залежності від змісту моделі має найбільше або найменше значення. Такий розв'язок, як і відповідне значення цільової функції, називається **оптимальним**.

Вимоги адекватності моделей включають: відповідності структури та властивостей об'єкта керування (процесу управління); відповідності властивостей і можливостей методів формування інформаційної бази моделей, виконання їх на основі процедури імітації; відповідності до вимог розв'язання управлінських задач.

1.2. Моделювання в економіці та його використання в розвитку та формалізації економічної теорії

Економіко-математичне моделювання як самостійна дисципліна, що вивчає процеси побудови, інтерпретації та використання математичних моделей економічних систем для розв'язання задач аналізу, синтезу та прогнозування їх діяльності, за останні роки почала розвиватися досить інтенсивними темпами. При цьому об'єктом дослідження та предметною областю економіко-математичного моделювання є система, яка об'єднує у собі економічну теорію, економічну політику та господарську практику. Тому самі економіко-математичні моделі, а також процеси їх побудови, верифікації та інтерпретації слугують зв'язуючою ланкою ланцюга: **«економічна теорія → економічна політика → господарська практика»** і на них покладена функція забезпечення цілісності економічної системи.

Елементи цього ланцюга в загальному випадку відносно самостійні й одночасно взаємопов'язані, при цьому зв'язки між ними мають зворотній характер. Так, економічна теорія впливає не тільки на економічну політику, але й безпосередньо на господарську практику. Цей вплив здійснюється через очікування, реакцію, думку, традиції, поведінку агентів різного рівня. В свою чергу, на економічну теорію впливає не тільки господарська практика (через наукове узагальнення та характерні особливості реальних економічних об'єктів), але і економічна політика – з допомогою цілеспрямованого чи

несвідомого формування попиту на ті чи інші теоретичні системи, а також через об'єктивний аналіз процесів прийняття управлінських рішень і їх формування.

Отже, економіко-математичні методи і моделі зараз – це не тільки корисний інструментарій для отримання нових знань в економіці, але й широко застосовуваний апарат для прийняття практичних рішень в прогнозуванні, банківській справі, управлінні персоналом, бізнесі.

1.3. Теоретичні основи математичного моделювання та класифікація моделей

Самостійна наукова дисципліна «Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом» має теоретичну основу, яка складається з:

- економічної кібернетики (основа: системний аналіз економіки, теорія економічної інформації, теорія керуючих систем);
- економетрії (основа: дисперсійний аналіз, кореляційний аналіз, регресійний аналіз, багатомірний аналіз, факторний аналіз, кластерний аналіз);
- математичної економіки (основа: теорія економічного росту, теорія виробничих функцій, міжгалузеві баланси, національні рахунки, аналіз попиту та пропозицій, регіональний та просторовий аналіз, глобальне моделювання);
- методів дослідження операцій (основа: математичне програмування, сіткове моделювання, теорія масового обслуговування, методи керування запасами, теорія ігор та методи прийняття рішень);
- експертних методів економіки (основа: математичні методи аналізу і планування економічних експериментів, імітаційне моделювання, ділові ігри, методи експертних оцінок);
- методів прогнозування.

Економіко-математичні моделі класифікують за такими ознаками:

- 1) за цільовим призначенням – теоретико-аналітичні та прикладні моделі;
- 2) за ступенем агрегування об'єктів – макроекономічні та мікроекономічні моделі;
- 3) за конкретним призначенням – балансові, трендові, оптимізаційні, імітаційні моделі;
- 4) за типом інформації, використаної в моделі – аналітичні та ідентифіковані моделі;
- 5) за врахуванням фактора невизначеності – детерміновані та стохастичні моделі;
- 6) за характером математичного апарату – матричні моделі, моделі лінійного та нелінійного програмування, кореляційно-регресійні моделі, моделі теорії масового обслуговування, моделі сіткового планування та керування, моделі теорії ігор;
- 7) за типом підходу до систем, які досліджуються – дескриптивні

(описові) моделі (наприклад, балансові та трендові моделі) та нормативні моделі (оптимізаційні та моделі рівня життя);

8) за структурою моделей та характером їх складових – одно- та багатфакторні моделі, статичні та динамічні моделі, моделі простої та складної структури;

9) за часовими характеристиками – довготермінові, середньотермінові та короткотермінові моделі.

1.4. Математична модель та її основні елементи

Економіко-математичні моделі дають змогу порівняти характеристики реального економічного об'єкта чи системи. Тип математичної моделі залежить як від природи системи, так і від задач дослідження. У загальному випадку математична модель системи (об'єкта, процесу) містить опис множини можливих станів останньої та закон переходу з одного стану до іншого (закон функціонування).

Математична модель економічного об'єкта – це його гомоморфне відображення у вигляді сукупності рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків. При побудові моделі необхідно визначити індекси (наприклад, виду продукції), ендogenous змінні (визначаються в ході розрахунків), екзогенні змінні (задаються поза моделлю) та параметри (коефіцієнти рівнянь моделі).

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. У загальному випадку виокремлюють лінійні та нелінійні моделі. Особливо важливим є клас лінійних моделей, найзручніших для аналізу й розрахунків, завдяки чому вони набули великого поширення.

Відмінності між лінійними та нелінійними моделями істотні не лише з математичного, а й з теоретико-економічного погляду. Адже числові залежності в економіці як на макро-, так і на мікрорівні мають принципово нелінійний характер: ефективність використання ресурсів з розширенням виробництва, зміна обладнання, моделі управління запасами тощо. Теорія «лінійної економіки» істотно відрізняється від теорії «нелінійної економіки». Від того, якими – опуклими чи не опуклими – вважаються множини виробничих можливостей підсистем (галузей, підприємств), істотно залежать висновки про можливості поєднання ланування та господарської самостійності економічних підсистем.

За співвідношенням екзогенних і ендogenous змінних, які включаються до моделей, останні поділяють на відкриті і замкнені. Повністю відкритих моделей не існує; модель повинна мати хоча б одну ендogenous змінну. Повністю замкненими (такими, що не містять жодної екзогенної змінної) економіко-математичні моделі бувають надзвичайно рідко. Загалом економіко-математичні моделі різняться за ступенем відкритості.

1.5. Принципи та етапи побудови моделей

Принцип достатності використаної інформації означає, що в кожній моделі повинно використовуватися тільки те інформаційне

забезпечення, яке відоме з необхідною для результатів моделювання точністю. Під відомим інформаційним забезпеченням розуміють нормативні, довідкові, звітні та інші характеристичні дані про реальні економічні системи та їх складові, які були до моменту моделювання.

Принцип інваріантності інформації вимагає, щоби в моделі вхідна інформація була незалежна від параметрів моделюючої системи, які ще не відомі на описуваній стадії дослідження. Використання цього принципу дає можливість при побудові моделей позбутися замкнутого кола, що часто трапляється, коли в моделі використовується інформація, яка може бути відома лише за результатами моделювання.

Зміст **принципу наступності** зводиться до того, що кожна модель не повинна порушувати властивостей об'єкта, встановлених або відображених у попередніх моделях комплексу. Отже, вибір критеріїв та моделі повинен ґрунтуватися на принципі наступності за умови, що забезпечується виконання принципів достатності та інваріантності використаної інформації. Якщо ж наступна модель не є складовою попередніх, то раніше побудовані моделі повинні бути скориговані для забезпечення принципу наступності.

Принцип ефективності реалізації передбачає, що кожна модель може бути реалізована за допомогою сучасних програмних та технічних засобів. Виконання такого принципу вимагає забезпечення відповідної точності вхідних даних, точності розв'язку задачі і тієї точності результативної інформації, яка достатня для досягнення практичних цілей.

Принцип інтегрованості полягає в тому, що взаємовідношення частини та цілого характеризуються сукупністю трьох елементів:

- 1) виникненням взаємодіючих систем – зв'язків між частинами цілого;
- 2) втратою деяких властивостей при входженні в ціле;
- 3) появою нових властивостей у цілого, зумовлених властивостями складових частин.

Принцип невизначеності припускає, що на граничних межах економічні процеси чітко невизначені. Перебіг процесів у часі призводить до того, що вони постійно змінюються, і якщо навіть можливо встановити будь-які характерні властивості чи якості процесу, то вони проявляють їх тільки в певний момент часу і в заданій ситуації. Тобто на мікрорівні економічні процеси необхідно розглядати з урахуванням випадкових факторів. Принцип невизначеності дає можливість стверджувати, що існує рівень факторів, малі відхилення котрих не викликають змін у стані системи. Однак в міру ускладнення моделі системи слід детальніше аналізувати її. Разом з тим абстрагується розв'язок задачі, а її результати можуть втрачати прикладний зміст.

Принцип головних компонентів передбачає, що в різних системах існують подібні види діяльності (управління, регулювання, розподілу), які можна виділити як стандартні. Вони бувають незмінними на деякому проміжку часу й можуть бути дещо подібними моделями.

Процедуру побудови моделі та підготовку управлінського рішення на основі економіко-математичних методів можна представити з допомогою

ряду взаємозв'язаних етапів, хоча в конкретних випадках деякі етапи можуть опускатися, а ряд процедур для побудови моделі – вестись паралельно.

Етапи побудови моделей:

1. Постановка задачі та формулювання мети дослідження. Цьому етапу передують виникнення проблемних ситуацій, усвідомлення яких призводить до необхідності їх узагальнення або вирішення для майбутнього досягнення певного ефекту (корисності). Основу етапу складає комплексний аналіз функціонування об'єкта дослідження, виявлення його проблемних місць. Далі йде опис найбільш характерних властивостей об'єкта, вивчення його структури та взаємозв'язків. Тут важливим моментом є формулювання гіпотез щодо поведінки та розвитку об'єкта. Завершується досліджуваний етап описом поставлених завдань у вигляді задачі та сформульованої мети дослідження з допомогою критерію чи критеріїв ефективності.

2. Побудова концептуальної моделі. Під концептуальною моделлю об'єкта розуміється сукупність якісних залежностей критеріїв оптимальності і різного роду обмежень від факторів, суттєвих для адекватного відображення функціональних характеристик об'єкта. На другому етапі відбувається формалізація існуючої економічної проблеми, яка полягає у вираженні її з допомогою математичної символіки через відповідні залежності та відношення. Як результат, на завершення етапу отримуємо математичну задачу, яка має цільову функцію та відповідну систему обмежень. Концептуальна модель відображає основні елементи:

- умови функціонування об'єкта, визначені характером взаємодії між об'єктом і його оточенням, а також між елементами об'єкта;
- мету дослідження об'єкта та напрямок покращення його функціонування;
- можливості керування об'єктом, визначення складу керованих змінних об'єкта.

У процесі формулювання концептуальної моделі об'єкта можуть виникати такі проблеми:

- побудова спрощеного і в той же час адекватного поставленій меті дослідження сценарію функціонування об'єкта;
- формулювання та уточнення мети дослідження;
- формалізація мети в критерії оптимальності;
- формалізація зовнішніх та внутрішніх обмежень;
- вибір факторів, які описують об'єкт і його оточення, котрі повинні бути враховані при дослідженні і, відповідно, включені в математичну модель;
- класифікація факторів і вибір серед них в першу чергу керованих змінних.

3. Формування інформаційної бази моделі. Цей етап є найбільш трудомістким, оскільки він представляє собою не тільки простий статистичний збір інформації. Тут висувуються досить високі вимоги до якості та достовірності підготовленої інформації. При формуванні інформаційного забезпечення використовується математичний інструментарій

теорії ймовірностей, економетричного моделювання. Тут має місце неперервність процесу формування необхідної інформації, який полягає в тому, що вихідні параметри однієї моделі можуть служити вхідними показниками для іншої.

4. Побудова числової економіко-математичної моделі. На цьому етапі на основі концептуальної моделі здійснюється формування числової математичної моделі об'єкта. Головна проблема етапу – визначення кількісних математичних співвідношень, які формалізують якісні залежності концептуальної моделі. Навіть за наявності повністю розробленого сценарію ці співвідношення можуть бути неочевидними. У зв'язку з цим часто виникає необхідність у виконанні проміжного етапу між побудовою концептуальної і математичної моделей об'єкта, тобто перетворення сценарію в алгоритм, який моделює взаємодію елементів між собою та оточенням в динаміці. Для реалізації математичної моделі на персональних комп'ютерах вона має бути представленою в числовій формі, тобто задані числові значення констант, границі зміни невизначених факторів та керованих змінних, закони розподілу випадкових величин.

5. Числовий розв'язок задачі. Етап дослідження числової математичної моделі розпочинається з її аналізу (відношення до певного класу моделей), вибору відповідного методу її розв'язання та програмного забезпечення. Головна проблема цього етапу – розробка алгоритму оптимального або найкращого в заданих умовах розв'язання певної задачі. На цьому етапі з'ясовується найважливіше питання щодо правильності й повноти результатів моделювання та можливості їх практичного використання, а також досліджуються можливі подальшого вдосконалення моделі. Тому перевіряють адекватність моделі за тими властивостями, що були взяті за найістотніші. Тобто потрібно виконати верифікацію і валідацію моделі, оскільки головна мета моделювання полягає в розв'язуванні практичних задач. Верифікація моделі – перевірка правильності структури (логіки) моделі. Валідація моделі – перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу в економіці.

6. Аналіз числових результатів і прийняття рішень. На цьому етапі вирішується важливе питання відносно правильності та повноти результатів моделювання, і, як результат, розробляються рекомендації для практичного використання при прийнятті відповідних рішень або для удосконалення моделі.

Контрольні запитання

1. Опишіть характерні можливості використання кількісних методів в економічних дослідженнях.
2. Наведіть пояснення категорій «модель» та «моделювання».
3. Які елементи входять до складу моделі?
4. Охарактеризуйте структуру ланцюга «економічна теорія-економічна політика-господарська практика».

5. Дайте визначення основних складових економіко-математичної моделі.
6. Які дисципліни складають теоретичну основу математичного моделювання? Коротко опишіть їхню структуру.
7. Чим визначається вид і характер економіко-математичної моделі?
8. Які ознаки є основою класифікації економіко-математичної моделі?
9. Опишіть якісні характеристики основних економічних моделей.
10. Дайте схематичну класифікацію математичних моделей.
11. Охарактеризуйте загальні принципи економіко-математичного моделювання.
12. Опишіть основні етапи побудови моделі, охарактеризуйте деталі кожного етапу.
13. Наведіть поняття концептуальної моделі, які проблеми можуть виникнути при її побудові, охарактеризуйте її основні елементи.

Глосарій

Верифікація моделі – перевірка правильності структури (логіки) моделі.

Валідація моделі – перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу в економіці.

Вимоги адекватності моделей включають: відповідності структури та властивостей об'єкта керування (процесу управління); відповідності властивостей і можливостей методів формування інформаційної бази моделей, виконання їх на основі процедури імітації; відповідності до вимог розв'язання управлінських задач.

Економіко-математичні методи – узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних для вивчення економіки та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

Ендогенні змінні – змінні, значення яких змінюються тільки всередині модельованої системи і ніяк не пов'язані зі змінами у зовнішньому середовищі. Значення цих змінних обчислюються моделями і зазвичай є залежними.

Екзогенні змінні – величини, що характеризують об'єкти в економічному аналізі, розраховуються або визначаються поза моделлю. Це змінні, значення яких відомі заздалегідь і які можуть використовуватися в якості вхідних (незалежних).

Критерій оптимальності – показник, який має економічний зміст та слугує способом формалізації конкретної мети керування і виражається за допомогою цільової функції через фактори моделі. Визначає розуміння змісту цільової функції. У деяких випадках в якості критерію оптимальності може виступати одна із вихідних характеристик об'єкта моделювання.

Математичне моделювання – метод дослідження, що заснований на аналогії процесів і явищ, різних за своєю природою, які описуються однаковими математичними залежностями. Математичні моделі поділяються на функціональні (кібернетичні) та структурні. Основна мета

функціональних (кібернетичних) моделей – пізнання сутності об'єкта через найважливіші прояви цієї сутності: діяльність функціонування, поведінка, Внутрішня структура при цьому не вивчається, а інформація про структуру не використовується. Структурні моделі відображають внутрішню організацію об'єкта: його складові частини, внутрішні параметри, їх взаємозв'язок із «входом» і «виходом» тощо.

Математична модель економічного об'єкта – це його гомоморфне відображення у вигляді сукупності рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків.

Моделювання – процес побудови моделі, за допомогою якого вивчається функціонування об'єктів різної природи. Він складається з трьох основних елементів: суб'єкта, об'єкта дослідження та моделі, з допомогою якої суб'єкт пізнає об'єкт. Процес побудови, вивчення та використання моделей, який включає побудову абстракцій, аналогій, конструювання наукових гіпотез.

Модель – це матеріально або розумово зображуваний об'єкт, який у процесі дослідження замінює об'єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об'єкт. Умовне зображення об'єкта, що певною мірою адекватно описує його функціональні характеристики, які істотно важливі для поставленої мети дослідження. Інструмент кількісного аналізу певних явищ, крім того, застосування моделей розвивають інтелект і дають багато корисного для прийняття рішень.

Оптимальний розв'язок – розв'язок, при якому цільова функція в залежності від змісту моделі має найбільше або найменше значення.

Параметри та константи – це незалежні від часу економічні показники та нормативні коефіцієнти, які характерні для об'єкта і включаються до моделі через систему обмежень.

Рівняння зв'язку – математична формалізація системи обмежень.

Розв'язок математичної моделі – набір (сукупність) значень змінних, які задовольняють її рівняння зв'язку. Розв'язки, які мають економічний зміст, називаються структурно допустимими. Моделі, які мають багато розв'язків, називаються варіантними на відміну від без варіантних, які мають один розв'язок.

Система обмежень визначає границі існування області дійсних та допустимих розв'язків і характеризує основні зовнішні та внутрішні властивості об'єкта.

Цільова функція математично зв'язує між собою фактори моделі, її значення визначається значеннями цих величин. Змістовне тлумачення цільовій функції надає критерій оптимальності.

Тести

1. Моделі поділяються на:

- а) моделі конвеєрів, потокових ліній, виробничих процесів;
- б) фізичні, геометричні, математичні;
- в) автоматів, структурних підрозділів;

г) географічні, кліматичні.

2. За якою класифікаційною ознакою ЕММ поділяються на статичні та динамічні:

- а) способом відображення чинника часу;
- б) формою математичних залежностей;
- в) ознакою способу відображення часу;
- г) способом відображення причинно-наслідкових зв'язків.

3. Економіко-математична методи:

- а) відображають властивості і особливості предмета, відтворюють зовнішній вигляд;
- б) відтворюють розміри об'єкта, відображають форми предметів, відтворюють зв'язки складових елементів;
- в) відображають кількісні залежності між параметрами, що характеризують стан і динаміку того чи іншого економічного процесу;
- г) узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних для вивчення економіки та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

4. Економіко-математичні моделі за цільовим призначенням поділяються на:

- а) теоретико-аналітичні та прикладні моделі;
- б) макроекономічні та мікроекономічні моделі;
- в) за конкретним призначенням – балансові, трендові, оптимізаційні, імітаційні моделі;
- г) аналітичні та ідентифіковані моделі.

5. Економіко-математичні моделі за врахуванням фактора невизначеності поділяються на:

- а) детерміновані та стохастичні моделі;
- б) матричні моделі, моделі лінійного та нелінійного програмування, кореляційно-регресійні моделі, моделі теорії масового обслуговування, моделі сіткового планування та керування, моделі теорії ігор;
- в) дескриптивні (описові) моделі та нормативні моделі (оптимізаційні та моделі рівня життя);
- г) одно- та багатфакторні моделі, статичні та динамічні моделі, моделі простої та складної структури.

6. Економіко-математичні моделі за часовими характеристиками поділяються на:

- а) довготермінові, середньотермінові та короткотермінові моделі;
- б) матричні моделі, моделі лінійного та нелінійного програмування, кореляційно-регресійні моделі, моделі теорії масового обслуговування, моделі сіткового планування та керування, моделі теорії ігор;
- в) дескриптивні (описові) моделі та нормативні моделі (оптимізаційні та моделі рівня життя);
- г) одно- та багатфакторні моделі, статичні та динамічні моделі, моделі простої та складної структури.

7. Перший етап побудови економіко-математичних моделей:

- а) виявлення обмежень, пов'язаних зі споживанням ресурсів;
- б) вибір об'єкта і встановлення меж його вивчення;
- в) визначення оптимального плану;
- г) постановка задачі та формулювання мети дослідження.

8. За якою класифікаційною ознакою ЕММ поділяються на дескриптивні, оптимізаційні, ігрові й імітаційні:

- а) формою математичних залежностей;
- б) характером використання;
- в) способом відображення причинно-наслідкових зв'язків;
- г) за типом підходу до систем, які досліджуються.

9. За цільовим призначенням моделі поділяються на:

- а) теоретико-аналітичні та прикладні моделі;
- б) фінансові, виробничі, транспортні, управління запасами, масового обслуговування, формування й оцінки ефективності тощо;
- в) теоретико-аналітичні та прикладні;
- г) макро- та мікроекономічні.

10. До елементів концептуальної моделі відносять:

- а) умови функціонування об'єкта, визначені характером взаємодії між об'єктом і його оточенням, а також між елементами об'єкта;
- б) мету дослідження об'єкта та напрямок покращення його функціонування;
- в) можливості керування об'єктом, визначення складу керованих змінних об'єкта;
- г) побудову спрощеного і в той же час адекватного поставленій меті дослідження сценарію функціонування об'єкта.

Практичні завдання

1. Охарактеризуйте модель штатного розкладу підприємства за набором класифікаційних ознак.
2. Виконайте моделювання процесу розробки програми адаптації персоналу за етапами:
 - постановка задачі та формулювання мети адаптації персоналу;
 - побудова концептуальної моделі процесу адаптації персоналу;
 - формування інформаційної бази для створення програми адаптації.

Список використаних джерел

1. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
2. Наконечний С. І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Підручник. – К.: КНЕУ, 2005. – 520 с.
3. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
4. Математичне та комп'ютерне моделювання економічних процесів: [монографія] / З.М. Соколовська, В.М. Андрієнко, І.Ю. Івченко [та ін.]; за заг. ред. З.М. Соколовської. – Одеса: Астропринт, 2016. – 308 с.

5. Антонова Л.В. Економетрика: навч. посіб. / Л.В. Антонова, О.О. Ляховець. Миколаїв: ЧДУ ім. П. Могили, 2011. – 232 с.
6. Азарова Л.М. Математичні моделі та методи оцінювання фінансового стану підприємства / Л.М. Азарова, О.В. Рузакова. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 172 с.

ТЕМА 2. МОДЕЛІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

- 2.1. Постановка задач лінійного програмування, їх моделі та основні форми
- 2.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування
- 2.3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

2.1. Постановка задач лінійного програмування, їх моделі та основні форми

Структурні складові економічної системи мають мету (ціль) свого розвитку та функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку, обсягу виробництва, мінімуму витрат чи відходів та інше. Ступінь досягнення мети, в більшості випадків, має

кількісну характеристику, тобто її можна описати математично. Нехай Z – обрана ціль.

Загальну лінійну математичну модель формалізації економічних процесів і явищ (загальну задачу лінійного програмування), можна подати у вигляді:

Знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.1)$$

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ що задовольняє умови (2.2) та (2.3), називають *допустимим планом* або *планом*. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною стратегією економічної системи, програмою дій. Кожному допустимому плану відповідає значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (2.1). Сукупність усіх розв'язків систем обмежень (2.2) та (2.3), тобто множина всіх допустимих планів, становить *область існування планів*. План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*. Оптимальний план є розв'язком задачі математичного програмування (2.1)-(2.3).

Відзначимо, що в задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно виражена. В реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують багато показників. Наприклад, максимум чистого доходу від виготовленої продукції чи максимум рентабельності, мінімум собівартості виготовленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів тощо. Хоча загальна задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, але існують математичні методи побудови компромісних планів, тобто методи багатокритеріальної оптимізації.

Розглянемо найпростіші математичні моделі задач лінійного програмування (ЛП):

1) Задача про використання ресурсів. Для виготовлення двох видів продукції (products) P_1 та P_2 використовуються три види ресурсів (resource): R_1, R_2, R_3 . Запаси ресурсів, норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції кожного виду та прибуток від одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Таблиця 2.1

Вид ресурсів	Запас ресурсів	Норматив витрат ресурсів на виготовлення 1 т продукції	
		P_1	P_2
R_1 (праця)	b_1 , люд-год	a_{11}	a_{12}
R_2 (обладнання)	b_2 , машино-год.	a_{12}	a_{22}
R_3 (основна сировина)	b_3 , т/т	a_{31}	a_{32}
Прибуток з одиниці продукції		c_1	c_2

Необхідно знайти такий план виробництва продукції, який забезпечить найбільший сумарний прибуток.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо: x_1, x_2 – загальна кількість продукції P_1 та P_2 ; Z – сумарний прибуток, який отримаємо від реалізації всієї продукції P_1 та P_2 .

Запишемо цільову функцію задачі. Прибуток від реалізації одиниці продукції P_1 становить c_1 , а всього цієї продукції плануємо випустити x_1 одиниць, тому перемноживши c_1 на x_1 , отримаємо весь прибуток, який матимемо від реалізації всієї продукції. Аналогічно прибуток від реалізації продукції P_2 становитиме $c_2 x_2$. Додамо ці два доданки $(c_1 x_1 + c_2 x_2)$ і отримаємо весь прибуток від реалізації продукції P_1 та P_2 . Оскільки

критерієм оптимізації є найбільший прибуток, то будемо знаходити максимальне значення цільової функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$

Тепер потрібно записати обмеження задачі. Нам відомо, скільки ресурсів кожного виду витрачається на виготовлення одиниці продукції кожного виду. Так, на виготовлення одиниці продукції P_1 ресурсу (витрати праці) $S1$ витрачаємо a_{11} , всього продукції P_1 плануємо виготовити x_1 одиниць. Перемножимо a_{11} на x_1 і отримаємо ту кількість ресурсу $R1$, яка піде на виготовлення всієї продукції P_1 . Цього ж ресурсу $R1$ на виготовлення одиниці продукції P_2 затрачаємо a_{12} , а плануємо виготовити x_2 одиниць продукції P_2 , тому, коли перемножимо a_{12} на x_2 , будемо мати кількість ресурсу $R1$, затрачену на виготовлення всієї продукції P_2 . Якщо додамо $a_{11}x_1$ та $a_{12}x_2$, то отримаємо сумарні витрати ресурсу $R1$ на виготовлення всієї продукції P_1 та P_2 . Але запас кожного виду ресурсу обмежений і використати більше, ніж ми маємо, не можемо. Запас ресурсу $R1$ становить b_1 . Тому обмеження з використання ресурсів матимуть вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \end{cases}$$

Очевидно, що невідомі x_1, x_2 не можуть бути від'ємними. Причому рівність нулю однієї з них означає, що даний вид продукції виготовляти нецільово.

Ми отримали таку задачу лінійного програмування:

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$

(2.4)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 \leq b_3, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Функція (2.4) – це цільова функція або функція мети, (2.5) – система обмежень задачі, причому перші три обмеження (2.5) називають основними обмеженнями, а останні два – природними чи економічними.

2) Узагальнена модель оптимального планування. Розглянемо загальну модель оптимального планування. Припустимо, що планується організувати випуск продукції r видів за допомогою m можливих технологій. Для цього використовується n видів виробничих ресурсів (матеріалів, обладнання, праці, сировини тощо).

Введемо позначення: i – індекс ресурсу, $i = \overline{1, n}$; j – індекс технології, $j = \overline{1, m}$; l – індекс виду продукції, $l = \overline{1, r}$; a_{ij} – витрати ресурсу i -го виду на

Тоді узагальнена модель оптимального планування матиме вигляд:
знайти такий план $\{x_j \geq 0; j = \overline{1, m}; Z \geq 0\}$, який забезпечить

при виконанні обмежень:

а) за обсягом ресурсів:

[illegible]

б) за структурою кінцевої продукції

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1m}x_m \geq K_1Z, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{2m}x_m \leq K_2Z, \\ , \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + ... + b_{rm}x_m \leq K_r Z \end{array} \right. \quad (2.7)$$

В кормовий раціон для утримання тварин в притулку входять п'ять видів кормів K_h , K_2 , K_3 , K_4 та K_5 . Для забезпечення належних показників здоров'я тварини повинні споживати поживні речовини P_1 , P_2 та P_3 . Мінімальна кількість поживних речовин, потрібних тваринам, а також вміст кількості одиниць поживних речовин в 1 кг корму та вартість 1 кг корму наведені в таблиці.

Необхідно скласти добовий раціон споживання таким чином, щоб затрати на нього були мінімальними.

Таблица 2.2

Поживні речовини	Мінімальна кількість поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму				
		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
P_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
P_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
P_3	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
Вартість 1 кг корму		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

Побудуємо математичну модель задачі. Введемо позначення: x_i – кількість корму (кг) K_i в раціоні ($i=1, 2, 3, 4, 5$); Z – вартість добового раціону.

Оскільки вартість одного кілограма корму становить c_i а загальна кількість корму i -го виду становить x_i кг ($i=1, 2, 3, 4, 5$), то перемноживши c_i на x_i і додавши ці добутки, отримаємо вартість добового раціону: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$.

Для побудови обмежень задачі перемножимо a_{11} – кількість поживних речовин P_1 , що містяться в 1 кг корму K_1 на загальну кількість цього корму x_1 і так по всіх видах кормів, щоб в результаті отримати загальну кількість поживних речовин, отриманих від усіх п'яти кормів, а мінімальна кількість поживних речовин повинна становити відповідно b_1, b_2, b_3 , тому обмеження з першого, другого та третього видів поживних речовин матимуть вигляд 2.9:

Ми отримали математичну модель задачі про кормовий раціон:

Цільова функція

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \rightarrow \max$$

(2.8)

Обмеження

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \geq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \leq b_3, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2.9)$$

4) Задача про раціональний розкрій матеріалів

Розглянемо умови задачі. Значна частина матеріалів надходить на підприємство певними одиницями стандартних розмірів. Для використання його доводиться розрізати на частини, щоб отримати заготовки потрібних розмірів. Виникає проблема мінімізації відходів матеріалів.

Для побудови математичної моделі задачі введемо позначення. Нехай:

m – кількість різних заготовок;

B_i – план випуску заготовок i -го виду;

n – кількість різних способів (варіантів) розкрою стандартного матеріалу;

a_{ij} – число заготовок i -го виду, одержаних за допомогою j -го способу розкрою;

c_j – величина відходів при j -му варіанті розкрою.

Схематично задачу можна представити у вигляді таблиці:

Таблиця 2.3

Варіант (спосіб) розкрою	Вихід заготовок з одиниці матеріалу				Відходи
	1-го виду	2-го виду	...	m -го виду	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	c_1

$$a_{i1} + a_{i2} = b_i, i = \overline{1, m}.$$

2) Визначаємо півплощини, які є розв'язками нерівностей. Для цього беремо координата точки з довільної півплощини і підставляємо в нерівність. Якщо нерівність справджується, то півплощина розв'язків направлена в сторону вибраної точки, якщо ж не справджується, то в протилежну сторону.

3) Знаходимо область, де перетинаються всі півплощини розв'язків – многокутник розв'язків. Якщо перетин – непорожня множина, то переходимо до наступного етапу. В протилежному випадку робимо висновок, що задача не має розв'язку.

4) Будуємо вектор нормалі $\vec{N}$, початок якого знаходиться в точці (0,0), а друга координата – в точці (c_1, c_2) (коефіцієнти при невідомих в цільовій функції). Вектор нормалі вказує напрямок зростання функції.

5) Перпендикулярно до вектора нормалі будуємо лінію рівнів $c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$. Для зручності знаходження оптимальних точок лінію рівнів будуємо так, щоб вона мала спільні точки з многокутником розв'язків (перетинала многокутник розв'язків).

6) Визначаємо оптимальні точки. Для цього лінію рівнів паралельно переносимо в напрямку вектора нормалі. Остання вершина многокутника, яку перетне лінія рівнів, буде точкою максимуму. Потім лінію рівнів паралельно переносимо в напрямку, протилежному напрямку вектора нормалі. Остання вершина многокутника розв'язків, яку перетне лінія рівнів в цьому випадку, є точкою мінімуму.

7) Знаходимо найбільше та найменше значення функції. Для цього підставимо координати оптимальних точок, знайдених шляхом розв'язування систем рівнянь граничних прямих (перетином яких є «оптимальна точка»), в цільову функцію.

2.3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

На відміну від графічного методу, який доцільно застосовувати лише для розв'язування задач лінійного програмування з двома змінними, за допомогою симплекс-методу можна знаходити розв'язки задач ЛП з більшою кількістю невідомих.

Процес розв'язування задачі таким методом має ітераційний характер. Обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються в конкретній послідовності за певними правилами до тих пір, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Симплекс-метод – це поетапна обчислювальна процедура, основою якої є принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі ЛП до іншого.

Цей метод можна використовувати для розв'язування задач ЛП, які записані в **канонічній формі**, тобто:

1) задача ЛП записана в першій стандартній формі (обмеження-

рівності);

2) праві частини рівнянь-обмежень (вільні члени) невід'ємні;

3) система рівнянь-обмежень має чітко виділений базис, тобто в кожному рівнянні є невідома з коефіцієнтом 1 і ця невідома відсутня в усіх інших рівняннях системи обмежень. Ці невідомі називаються базисними, а всі інші – вільними;

4) цільова функція залежить тільки від вільних невідомих.

Алгоритм симплексного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з таких етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою чисел нульового рядка симплекс-таблиці. Якщо умова оптимальності виконується, то визначений опорний план є оптимальним, якщо ж не виконується, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням ключового (генерального) елемента та розрахунком нової симплекс-таблиці.

5. Повторення дій, починаючи з п.3.

Розглянемо детальніше кожен етап цього алгоритму.

1. Визначення початкового опорного плану починають із запису задачі лінійного програмування у канонічній формі. Якщо в системі обмежень є обмеження-нерівності, то до лівої частини обмежень типу « $\leq$ » додаємо додаткові невід'ємні невідомі, а від лівих частин обмежень типу « $\geq$ » віднімаємо додаткові невід'ємні невідомі. Якщо права частина обмеження від'ємна, то множимо все обмеження на (-1) . Якщо цільова функція містить базисні невідомі, то виражаємо їх через вільні з системи обмежень і підставляємо в цільову функцію.

Після зведення задачі до канонічного виду перевіряємо, чи кількість базисних невідомих дорівнює кількості рівнянь системи обмежень. Якщо ця рівність виконується, то початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій. Для цього вільні невідомі прирівнюють до нуля і з кожного рівняння-обмеження зразу отримують значення базисних невідомих, тобто таким чином, отримуємо початковий опорний план задачі. Якщо ж кількість базисних невідомих менша від кількості рівнянь-обмежень задачі, то для побудови початкового опорного плану використовують метод штучного базису.

2. Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного плану на оптимальність здійснюють з допомогою симплекс-таблиць.

В першому стовпчику таблиці записуємо номер таблиці (ітерації), в другому стовпчику – номер рядка, в наступному – «Базис» (базисні невідомі), далі – «Опорний план» (значення базисних змінних), а у решті стовпчиків,

кількість яких дорівнює кількості невідомих задачі, – відповідні коефіцієнти при невідомих кожного обмеження задачі лінійного програмування.

Звернемо увагу на те, що в нульовому рядочку симплекс-таблиці записуємо дані з цільової функції.

3. Перевіряємо опорний план на оптимальність згідно з теоремою.

Теорема (критерій оптимальності симплекс-методу). *Якщо цільова функція максимізується (мінімізується) і в нульовому рядку відсутні від'ємні (додатні) числа, за винятком стовпчика «Опорний план», то опорний план є оптимальним.*

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки: умова оптимальності виконується, а отже опорний план є оптимальним; умова оптимальності не виконується, тоді потрібно перейти до нового опорного плану.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з базису деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних невідомих задачі.

Змінну, яку потрібно ввести в базис, визначаємо за елементами нульового рядка. Якщо цільова функція досліджується на мінімум і в нульовому рядку симплекс-таблиці є додатні числа (за винятком стовпчика «Опорний план»), то вибираємо найбільше з цих чисел і невідому, що відповідає цьому числу, вводимо в базис. Якщо ж цільова функція досліджується на максимум і в нульовому рядку симплекс-таблиці є від'ємні числа (за винятком стовпчика «Опорний план»), то вибираємо найменше з них (найбільше по модулю) і невідому, що йому відповідає, вводимо в базис. *Стовпець*, який відповідає невідомій, що вводиться в базис, називається *ключовим*.

Для визначення змінної, яка має бути виведена з базису, знаходять відношення елементів стовпця «Опорний план» до відповідних додатних елементів ключового стовпця (нульовий рядок не розглядаємо) і вибираємо найменше з цих відношень. Невідому, яка відповідає цьому відношенню, виключаємо з базису. Рядок, який відповідає цьому найменшому відношенню, називається *ключовим рядком*. На перетині ключового рядка і ключового стовпця знаходиться *ключовий* (генеральний) *елемент*. За допомогою генерального елемента і методу Жордана-Гауса переходимо до нової симплекс-таблиці.

Далі ітераційний процес повторюють поки не буде знайдено оптимальний план задачі лінійного програмування.

Приклад 2.1. Розв'язати задачу лінійного програмування:

- симплекс-методом;
- використати надбудову MS EXCEL «Пошук рішення» для дотримання принципу ефективності реалізації побудованої моделі.

Для виготовлення двох видів продукції P_1 та P_2 використовуються три види ресурсів R_1 , R_2 та R_3 . Запаси ресурсів, норми витрат ресурсів на

виготовлення 1 т продукції кожного виду та прибуток з одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці 2.4:

Таблиця 2.4

Вид ресурсів	Запаси ресурсів	Витрати ресурсів на виготовлення 1 т продукції	
		P_1	P_2
Праця, люд-год	275	4	5
Обладнання, машино-год.	680	13	8
Основна сировина, т	60	1	1
Прибуток з одиниці продукції, тис. грн.		9	6

Необхідно знайти такий план виробництва, який забезпечить найбільший сумарний прибуток.

Розв'язок. Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_1 та x_2 – загальна кількість відповідно продукції P_1 та P_2 ; Z – сумарний прибуток, який отримаємо від реалізації виробленої продукції. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 275, \\ 13x_1 + 8x_2 \leq 680, \\ x_1 + x_2 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Розв'яжемо задачу симплекс-методом. Для цього приводимо задачу до канонічного виду:

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 275, \\ 13x_1 + 8x_2 + x_4 = 680, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю задачу симплекс-методом. Заповнимо початкову таблицю 2.5:

Таблиця 2.5

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих				
				$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5

1	0	Z	0	-9	-6	0	0	0
	1	x_3	275	4	5	1	0	0
	2	x_4	680	13	8	0	1	0
	3	x_5	60	1	1	0	0	1

Ітерація 1. В нульовий рядок заносимо інформацію про цільову функцію, а в рядки 1-3 – дані з відповідних рівнянь системи обмежень. Для заповнення нульового рядка початкової симплекс-таблиці цільову функцію запишемо в такому ж вигляді, як обмеження задачі, тобто у вигляді рівняння $Z - 9x_1 - 6x_2 = 0$ (всі невідомі перенесемо в ліву частину), і в подальшому нульовий рядок будемо заповнювати так само, як і рядки 1-3, що відповідають обмеженням. В стовпчику «Базис» записуємо базисні невідомі з системи обмежень, а для нульового рядка базисною невідомою є Z. В стовпчику «Опорний план» записуємо значення базисних невідомих, коли вільні невідомі x_1 та x_2 дорівнюють нулю (праві частини рівнянь-обмежень та цільової функції). В наступних стовпчиках записуємо коефіцієнти при невідомих в цільовій функції та системі обмежень.

Випишемо з першої таблиці початковий опорний план $x_{\text{опорн}} = (0; 0; 275; 680; 60)$. Знайдемо значення цільової функції за цього плану $Z(x_{\text{опорн.}}) = 9 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$. Перевіримо, чи даний опорний план є оптимальним. Для визначення ступеня оптимальності опорного плану використовується нульовий рядок. Цільова функція досліджується на максимум, значить для оптимальності опорного плану в нульовому рядку не має бути від'ємних чисел. В задачі в нульовому рядку є два від'ємних числа ((-9) та (-6)), отже досліджуваний опорний план не є оптимальним. Вибираємо найменше з цих чисел (-9). Стовпець, в якому знаходиться це число є ключовим, а невідому x_1 , яка відповідає цьому стовпцю потрібно ввести в базис. Ставимо біля цієї невідомої стрілочку (якщо цільова функція мінімізується і в нульовому рядку є додатні числа, то вибираємо найбільше з цих чисел і за ним визначаємо, яку невідому потрібно ввести в базис). Щоб визначити, яку з невідомих потрібно вивести з базису, складаємо відношення елементів стовпця «Опорний план» до відповідних додатних елементів ключового стовпця і вибираємо найменше з цих відношень:

$$275 : 4 = 68,75;$$

$$680 : 13 = 52,3; \quad (\min)$$

$$60 : 1 = 60.$$

Невідому, яка відповідає цьому найменшому відношенню (в нашому випадку x_4) виводимо з базису. Відмічаємо цю невідому стрілочкою, а рядок, якому відповідає це найменше відношення називається ключовим. На перетині ключового рядка і ключового стовпця знаходиться ключовий (генеральний) елемент, рівний 13.

Ітерація 2. Переходимо до другої симплекс-таблиці. Замість невідомої

x_4 в базис вводимо невідому x_1 . На місці ключового елемента нам потрібно отримати 1, а всі інші елементи в стовпці повинні дорівнювати нулю. Для цього ключовий рядок ділимо на ключовий (генеральний) елемент, тобто на 13, і результат записуємо на місці другого рядка табл. 2.6. Усі інші рядки табл. 2.6 заповнюємо методом Жордана-Гауса, послідовно виключаючи невідому x_1 з нульового, першого та третього рядків:

1) множимо всі елементи другого рядка на 9 і додаємо відповідні елементи нульового рядка табл. 2.5, результат записуємо на місці нульового рядка табл. 2.6;

2) множимо кожен елемент другого рядка на (-4) і додаємо відповідні елементи першого рядка табл. 2.5, результат записуємо на місці першого рядка табл. 2.6;

3) множимо кожен елемент другого рядка на (-1) і додаємо відповідні елементи третього рядка табл. 3.1, результат записуємо на місці третього рядка табл. 2.6.

Таблиця 2.6

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих				
				x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	x_4	x_5
2	0	Z	$\frac{6120}{13}$	0	$\frac{-6}{13}$	0	$\frac{9}{13}$	0
	1	x_3	$\frac{855}{13}$	0	$\frac{33}{13}$	1	$\frac{-4}{13}$	0
	2	x_1	$\frac{680}{13}$	1	$\frac{8}{13}$	0	$\frac{1}{13}$	0
	3	$x_5 \leftarrow$	$\frac{100}{13}$	0	$\frac{5}{13}$	0	$\frac{-1}{13}$	1

Із таблиці виписуємо новий опорний план:

$$X_{\text{опорн}} = \left(\frac{680}{13}, 0, \frac{855}{13}, 0, \frac{100}{13} \right)$$

Значення цільової функції за такого опорного плану:

$$Z(X_{\text{опорн}}) = 470.77$$

Перевіримо цей опорний план на оптимальність. В нульовому рядку є від'ємне число $(-6/13)$, тому такий опорний план не є оптимальним. Невідому, яка відповідає цьому стовпцю (x_2) вводимо в базис. Відмічаємо цю невідому стрілочкою. Складаємо відношення елементів стовпця «Опорний план» до відповідних додатних елементів ключового стовпця і вибираємо найменше з цих відношень:

$$\frac{855}{13} \div \frac{33}{13} = 25.9$$

$$\frac{680}{13} \div \frac{8}{13} = 85$$

$$\frac{100}{13} \div \frac{5}{13} = 20 \text{ (min)}$$

Невідому, яка відповідає цьому найменшому відношенню (в прикладі x_5) виводимо з базису. Відмічаємо цю невідому стрілочкою. Ключовий елемент 5/13.

Ітерація 3. Переходимо до третьої симплекс-таблиці. Замість невідомої x_5 в базис вводимо невідому x_2 . Ключовий (третій) рядок ділимо на 5/13 і результат записуємо на місці третього рядка табл. 2.7. Знову використовуємо метод Жордана-Гауса, послідовно виключаючи невідому x_2 з нульового, першого та другого рядків:

1) множимо всі елементи третього рядка на 6/13 і додаємо відповідні елементи нульового рядка табл. 2.6, результат записуємо на місці нульового рядка табл. 2.7;

2) множимо кожен елемент третього рядка на (-33/13) і додаємо відповідні елементи першого рядка табл. 2.6, результат записуємо на місці першого рядка табл. 2.7;

3) кожен елемент третього рядка множимо на (- 8/13) і додаємо відповідні елементи другого рядка табл. 2.6, результат записуємо на місці другого рядка табл. 2.7.

Таблиця 2.7

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих				
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	0	Z	480	0	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
	1	x_3	15	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{33}{5}$
	2	x_1	40	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{8}{5}$
	3	x_2	20	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$

Висновок. В нульовому рядку останньої таблиці немає від'ємних чисел, це означає наявність оптимального розв'язку: $x_{opt}=(40; 20; 15; 0; 0)$, $Z_{max} = 480$ тис.грн. Отже, максимальний дохід становитиме $Z_{max}=480$, якщо продукції P_1 виготовити 40 т ($x_1=40$), а продукції P_2 - 20 т ($x_2=20$). Підстановка значень оптимального плану до формули цільової функції дає такий результат: $Z_{max} = 9 \cdot 40 + 6 \cdot 20 = 360 + 120 = 480$ тис. грн. Невідомі $x_4=0$ та $x_5=0$, а це означає, що ресурси роботи обладнання та основна сировина використані повністю, а $x_3=15$ люд-год, означає, що ресурси праці є в залишку (недовикористані) в кількості 15 люд-год.

2. Розв'яжемо задачу із застосуванням надбудови «Пошук рішення». Для цього вихідні дані скопіюємо до спеціально створеного листа EXCEL, із використанням функції СУММПРОИЗВ з категорії «математичні»

розрахуємо стовпчик «Витрати ресурсів» (сума добутків витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції на опорний план) та цільову комірку «Сумарний прибуток від виробництва» (сума добутку прибутку з одиниці продукції на опорний план). Результати матимуть вигляд:

Таблиця 2.8

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Витрати ресурсів на виготовлення 1 т продукції		Витрати ресурсів
		P_1	P_2	
$R1$	275	4	5	0
$R2$	680	13	8	0
$R3$	60	1	1	0
Прибуток з одиниці продукції, тис. грн.		9	6	Сумарний прибуток від виробництва, тис. грн.
Опорний план, од.		0	0	0

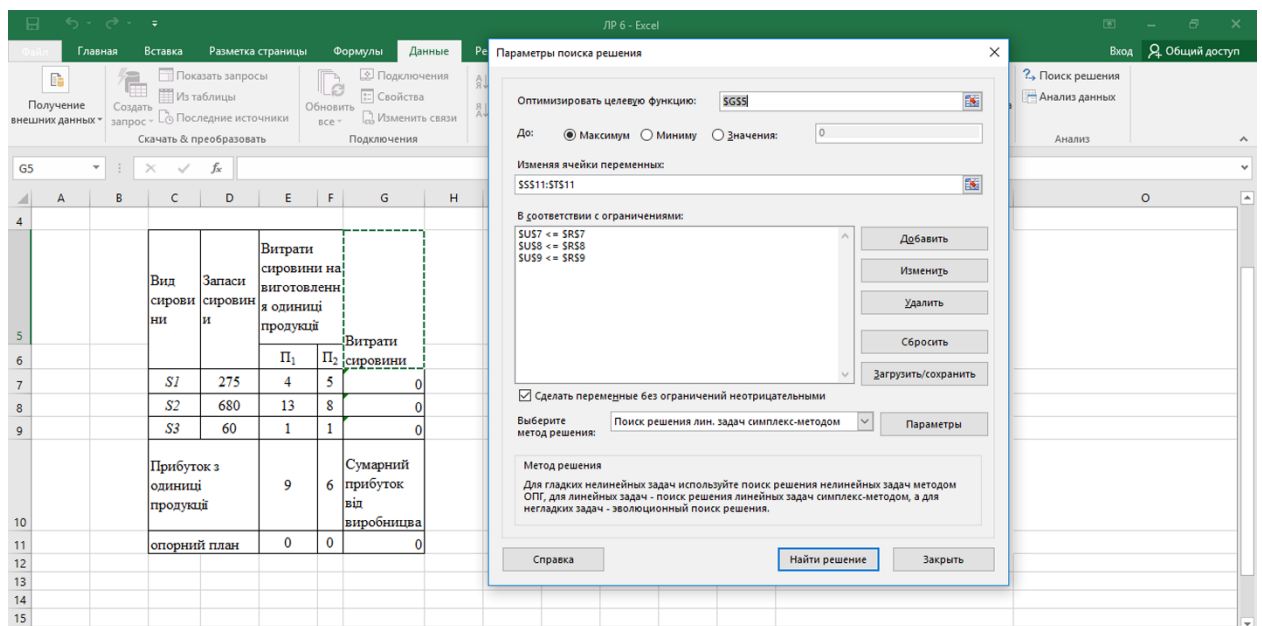


Рисунок 2.1. Інтерфейс надбудови «Пошук рішення» для розв’язання оптимізаційних задач (результати до оптимізації)

Після оптимізації отримані такі результати:

Таблиця 2.9

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Витрати ресурсів на виготовлення 1 т продукції		Витрати ресурсів
		P_1	P_2	
$R1$	275	4	5	260
$R2$	680	13	8	680

R3	60	1	1	60
Прибуток з одиниці продукції, тис. грн.		9	6	Сумарний прибуток від виробництва, тис. грн.
Опорний план, од.		40	20	480

До того ж даний інструмент дозволяє виконати поглиблений аналіз оптимізаційних розрахунків із використанням таких звітів «Звіт по результатам», «Звіт по стійкості», «Звіт по границях».

Висновок. Результати оптимізації із застосуванням зазначеного інструменту дозволяють зробити висновки аналогічні попередньому розрахунку: оптимальним є виробництво продукції P_1 в обсязі 40 одиниць, продукції P_2 в обсязі 20 одиниць. Саме за таких обсягів виробництва досягається максимальний прибуток в розмірі 480 тис. грн.

При розв'язуванні задач лінійного програмування можливі випадки, коли оптимального плану задачі лінійного програмування не існує (цільова функція необмежена) або існує неєдиний розв'язок задачі.

Контрольні запитання

1. Виконайте постановку задачі лінійного програмування.
2. Поясніть поняття допустимого розв'язку задачі лінійного програмування.
3. Надайте визначення опорного та оптимального плану.
4. Запишіть типові моделі задач лінійного програмування.
5. Які Вам відомі стандартні форми запису задач лінійного програмування?
6. Які обмеження існують до розв'язування задачі лінійного програмування графічним методом?
7. Надайте визначення опуклої множини.
8. Поясніть зміст етапів алгоритму графічного методу розв'язування задач лінійного програмування.
9. Що являє собою запис задачі лінійного програмування в канонічній формі?
10. Поясніть зміст етапів алгоритму симплекс-методу.
11. Сформулюйте критерій оптимальності симплекс-методу.

Глосарій

Многогранник розв'язків – сукупність усіх розв'язків задачі лінійного програмування, який є багатогранною опуклою множиною.

Невироджений опорний план – план, який є вершиною многогранника планів задачі, що утворений перетином n гіперплощин, тобто задовольняє n лінійно незалежних обмежень – строгих рівностей. В протилежному випадку опорний план є **виродженим**.

Опорний план задачі лінійного програмування – план, що утворений координатами вершин многогранника планів задачі.

Пошук рішення – це програмна надбудова для Microsoft Office Excel, яка доступна при встановленні Microsoft Office або Excel.

Симплекс-метод – це поетапна обчислювальна процедура, основою якої є принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі ЛП до іншого.

Тести

1. Пошук рішення – це:

- а) програмна надбудова для Microsoft Office Excel, яка доступна при встановленні Microsoft Office або Excel;
- б) поетапна обчислювальна процедура, основою якої є принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі ЛП до іншого;
- в) план, що утворений координатами вершин многогранника планів задачі;
- г) сукупність усіх розв'язків задачі лінійного програмування, який є багатогранною опуклою множиною.

2. Симплекс-метод – це:

- а) програмна надбудова для Microsoft Office Excel, яка доступна при встановленні Microsoft Office або Excel;
- б) поетапна обчислювальна процедура, основою якої є принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі ЛП до іншого;
- в) план, що утворений координатами вершин многогранника планів задачі;
- г) сукупність усіх розв'язків задачі лінійного програмування, який є багатогранною опуклою множиною.

3. Опорний план задачі лінійного програмування – це:

- а) програмна надбудова для Microsoft Office Excel, яка доступна при встановленні Microsoft Office або Excel;
- б) поетапна обчислювальна процедура, основою якої є принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі ЛП до іншого;
- в) план, що утворений координатами вершин многогранника планів задачі;
- г) сукупність усіх розв'язків задачі лінійного програмування, який є багатогранною опуклою множиною.

4. Многогранник розв'язків – це:

- а) програмна надбудова для Microsoft Office Excel, яка доступна при встановленні Microsoft Office або Excel;
- б) поетапна обчислювальна процедура, основою якої є принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі ЛП до іншого;
- в) план, що утворений координатами вершин многогранника планів задачі;
- г) сукупність усіх розв'язків задачі лінійного програмування, який є багатогранною опуклою множиною.

5. Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування графічним методом складається з:

- а) 4-х етапів;
- б) 7-ми етапів;
- в) 5-ти етапів;
- г) 9-ти етапів.

6. Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом складається з:

- а) 4-х етапів;
- б) 7-ми етапів;
- в) 5-ти етапів;
- г) 9-ти етапів.

7. Які обмеження щодо кількості вільних змінних існують при розв'язанні задач лінійного програмування графічним методом:

- а) не більше 2-х змінних;
- б) не більше 3-х змінних;
- в) не більше 4-х змінних;
- г) не більше 5-ти змінних.

8. За теоремою про критерій оптимальності при розв'язуванні задач лінійного програмування перевіряють:

- а) нульовий рядок симплекс-таблиці;
- б) 2-й рядок симплекс-таблиці;
- в) 1-й рядок симплекс-таблиці;
- г) 3- рядок симплекс-таблиці.

9. Задача лінійного програмування в канонічній формі включає:

- а) тільки базисні змінні;
- б) тільки вільні змінні;
- в) базисні і вільні змінні.

10. Трактуювання опуклої множини:

- а) може бути тільки аналітичним;
- б) може бути тільки геометричним;
- в) може бути аналітичним і геометричним.

Практичні завдання

Для виготовлення двох видів продукції P_1 та P_2 використовуються чотири види ресурсів R_1 , R_2 , R_3 та R_4 . Запаси, норми витрат на виготовлення 1 т продукції кожного виду та оптова ціна (тис. грн.) наведені в таблиці:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Витрати ресурсів на виготовлення 1 т продукції	
		P_1	P_2
Праця, люд-год.	275	4	5

Обладнання, машино-год.	680	13	8
Основна сировина, т/т	60	1	1
Упаковочні матеріали, м ² /т	120	0,5	0,76
Ціна, тис. грн.		10	12

Необхідно знайти такий план виробництва, який забезпечить найбільший сумарний дохід. З цією метою:

- виконати математичну постановку задачі;
- розв'язати задачу симплекс-методом;
- розв'язати задачу із використанням надбудови «Пошук рішення»;
- зробити висновки.

Список використаних джерел

1. Вітлінський В. В. Математичне програмування і дослідження операцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. / В. В. Вітлінський, Л. Г. Тарасова, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2014. – 347 с.
2. Пласконь С.А., Процик А.І. Математичне програмування. – Тернопіль: Економічна думка, 2006. – 221 с.
3. Скворчевський О.Є. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті: текст лекцій з курсу «Економіко-математичні методи та моделі» / О.Є. Скворчевський. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – 76 с.
4. Jeffrey H. Moore. Decision modeling with Microsoft Excel / Jeffrey H. Moore, Larry R. Weatherford – Stanford University, University of Wyoming, 2004. - 1024 p.
5. Michael R. Middleton. Decision Analysis Using Microsoft Excel / Michael R. Middleton – San Francisco: School of Business and management University of San Francisco, 2006. – 400 p.