

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

САФОНОВ Владимир Михайлович

УДК 517.53

УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВНУТРЕННИХ ОТОБРАЖЕНИЙ
И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 - математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

КИЕВ - 1986

Работа выполнена в отделе геометрической теории функций
и топологии Института математики АН УССР.

Научный руководитель - доктор физико-математических
наук, профессор
Ю.Ю. ТРОХИМЧУК.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических
наук, профессор
В.Я. ГУТЛЯНСКИЙ,
кандидат физико-математических
наук
В.Н. КОНОВАЛОВ.

Ведущая организация - Институт математики СО АН СССР.

Защита состоится "___" _____ 1986 года в ___ часов
на заседании специализированного совета Д 016.50.01 при Инсти-
туте математики АН УССР (252601, 1СП, Киев-4, ул. Репина, 3).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Института математики АН УССР.

Автореферат разослан "___" _____ 1986 года.

Ученый секретарь
специализированного совета

А.Ю. ЛУЧКА

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важными для приложений в анализе (последних аналитических) являются внутренние отображения двумерных ориентируемых многообразий. Они представляют собой произвольные отображения вида $w = f \circ T$, где f – аналитическая функция, а T – гомеоморфизм многообразия на себя. Иными словами, функции осуществляющие внутренние отображения, являются топологически эквивалентными аналитическим.

Внутренние отображения были определены известным румынским математиком С.Стоиловым (1887–1961 гг.) еще в 1928 году. Здесь можно отметить, что несколько ранее Стоилова, по существу, эти отображения были введены венгерским математиком К.Сциллардом (1927 г.), однако он не подверг их столь глубокому исследованию.

Особенно важными и полезными для этих приложений являются различные критерии продолжимости внутренних отображений (фактически теоремы о "стираемости" особенностей), представляющие собой аналогию с классическими предложениями теории функций. Теоремы об устранимости топологических особенностей находят свое широкое применение при исследовании различного рода проблем, связанных со "стираемостью" особенностей голоморфных отображений.

Этой тематике было посвящено большое число работ как советских, так и зарубежных математиков. Здесь С.Стоилу принадлежит классический результат, названный им леммой о непрерывном продолжении внутреннего отображения. В последние десятилетия результаты в этом направлении были получены Ю.Ю.Трохимчуком, А.В.Бондарем, Ю.Б. Зелинским и другими. Рассмотрение вопросов о продолжимости внутренних отображений и исследование условий аналитичности непрерывных функций для теории функций всегда представляются актуальными.

Цель работы. Нахождение критериев продолжимости внутренних отображений и аналитического продолжения функций одного комплексного переменного в случае, когда замкнутое множество P возможных особых точек – нульмерно либо простая дуга.

Общая методика выполнения исследования. В диссертации существенно используются свойства внутренних отображений и методы теории аналитических функций, применяется аппарат теоретико-множественной топологии.

Научная новизна и практическая значимость. Все результаты работы являются новыми. Они могут быть использованы в геометрической теории функций и в других разделах анализа.

В первой главе получена теорема о продолжении внутренних отображений, позволяющая устранить множество особенностей $\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — замкнуто и $\dim \mathcal{P} = 0$, при некотором дополнительном условии.

Во второй главе устанавливается критерий аналитичности функции одного комплексного переменного. "Стираемой" особенностью здесь является совершенное множество $\mathcal{P}$, для которого $\dim \mathcal{P} = 0$, $Mes \mathcal{P} = 0$, при условии существования конечной производной функции f в точках $\mathcal{P}$ в каком-либо фиксированном направлении.

В главе III доказана теорема об аналитическом продолжении через однозначную дугу.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах отдела геометрической теории функций и топологии Института математики АН УССР; на Международной конференции по теории приближения функций (Киев, 1983 г.); на научной конференции молодых математиков Института математики АН УССР (1984 г.); на Всесоюзном коллоквиуме по квазиконформным отображениям и их обобщениям (Донецк, 1984 г.); на семинарах XIX и XX Летних математических школ в Кацивели (Крым, 1984-1985 г.г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1, 2].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 22 наименований и изложена на 62 страницах машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, формулируется цель исследования и дается краткий исторический обзор исследуемой тематики, приводится аннотация полученных результатов.

В первой главе рассматривается вопрос, связанный с продолжимостью внутренних отображений. Известно несколько критериев такой продолжимости (С.Стоилов, Ю.Ю.Трохимчук). В диссертации доказывается совершенно новый критерий. Приведем сначала определение.

О п р е д е л е н и е I. Непрерывное отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ области $\mathcal{D}$ обладает свойством T в точке z_0 , если через эту точку проходит прямая $t(z_0)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) образ ее есть кривая $\angle(w_0) = \angle_1(w_0) \cup \angle_2(w_0)$ такая, что $\angle_1(w_0) = f(t_1(z_0))$ и $\angle_2(w_0) = f(t_2(z_0))$, где $t_1(z_0), t_2(z_0)$ — лучи прямой $t(z_0)$ с общей начальной точкой z_0 ;
- 2) образы $\angle_1(w_0)$ и $\angle_2(w_0)$ лежат в паре вертикальных углов, соответственно $\Omega_1(w_0)$ и $\Omega_2(w_0)$, раствора меньше π с вершинами в точке $w_0 = f(z_0)$.

Т е о р е м а I. Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ — непрерывное отображение, являющееся внутренним в $\mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — замкнуто и $\dim \mathcal{P} = 0$. Если f обладает свойством T в каждой точке множества $\mathcal{P}$, исключая не более чем счетное его подмножество, то оно является внутренним во всей области $\mathcal{D}$.

Легко построить примеры, показывающие, что условие $\dim \mathcal{P} = 0$ в этой теореме существенно.

В § I доказывается лемма I о совершенном множестве (аналог леммы Д.Е.Меньшова), которая позволяет считать прямые $t(z)$ (для всех $z \in \mathcal{P}$) "почти" одинакового направления, а их образы — кривыми $\angle_1(w)$ и $\angle_2(w)$, расположенными в паре вертикальных углов $\Omega_1(w)$ и $\Omega_2(w)$, полученных параллельным переносом в точку $w = f(z)$ фиксированной пары вертикальных углов Ω_1, Ω_2 .

Основная лемма 2 в § 2 утверждает, что в условиях теоремы прообраз $f^{-1}(G)$ любого выпуклого многоугольника G из определенного их семейства $\{G\}$ состоит из жордановых областей.

Глава II посвящена исследованию условий аналитичности функции одного комплексного переменного: доказывается теорема о "стираемости" особенностей аналитической функции.

В § I доказывается основная лемма 7:

Пусть в прямоугольнике $Q \subset \mathbb{C}$ со сторонами, параллельными осям координат, заданы непрерывная функция $f(z)$ и совершенное нульмерное множество $\mathcal{P}$. Тогда, если

- 1) f локально-липшицева вне $\mathcal{P}$ с одной и той же константой Липшица;
- 2) в каждой точке $z \in \mathcal{P}$ существует ограниченная частная производная $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$,

то найдется прямоугольник $Q' \subset Q$, содержащий точки $\mathcal{P}$ внутри, в котором f удовлетворяет условию Липшица всюду.

В § 2 доказывается следующий основной результат, доказательство которого основано на существенном применении теоремы I главы I.

Т е о р е м а 2. Пусть непрерывная в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ является аналитической вне произвольного совершенно нульмерного множества $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ плоской меры нуль. Если в каждой точке $z \in \mathcal{P}$, исключая лишь, быть может, счетное его подмножество, существует конечная частная производная $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, то $f(z)$ является аналитической всюду в области $\mathcal{D}$.

Наконец, третья глава относится к доказательству одной теоремы об аналитическом продолжении через однозначную дугу. Известная классическая теорема для аналитических функций, принадлежащая Пэнлеве, утверждает, что условие непрерывности достаточно для "стираемости" спрямляемых дуг. Если кривая неспрямляема, то эта теорема уже не верна. Укажем, как на более важный для нас, пример А. Данжуа, в котором построена всюду на плоскости непрерывная (и ограниченная) функция $f(z)$, аналитическая вне однозначной кривой $\mathcal{L}$, т.е. кривой, являющейся графиком однозначной и непрерывной функции $y = \psi(x)$, $-\infty \leq x \leq +\infty$, для которой каждая точка $\mathcal{L}$ является особой (такая функция

принимает на Δ все свои значения из $C \setminus \Delta$, т.е. $f|_{\Delta}$ - кривая типа Пуансо).

Оказывается, что если образ $f(\Delta)$ однозначной кривой Δ есть также однозначная кривая, то f аналитически продолжается и на Δ . Именно, доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть в области $D \subset C$ задана непрерывная функция $f(z) = u + iv$, аналитическая вне некоторой однозначной дуги ℓ . Если образ $\ell_1 = f(\ell)$ есть также однозначная дуга, то $f(z)$ аналитична всюду в D .

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Юрию Юрьевичу Трохимчуку за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ:

1. Сафонов В.М. Теорема о продолжении внутренних отображений. - В кн.: Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 106-131.
2. Сафонов В.М. Одна теорема об аналитическом продолжении. Киев, 1985. - 12 с. - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики: 85.85).

Подп. в печ. 12.03.86 . БФ 21525 . Формат 60х80/16. Бумага тип.
№ 1. Офс. печать. Усл. печ. л. 0,46 . Уч.-изд. л. 0,4 . Тираж 100 экз.
Заказ 268 . Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН УССР.
252601, ИСП, Киев-4, ул. Репина, 3.