АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Ответственные редакторы:
член-корреспондент АН УССР П.Ф.ФИЛЬЧАКОВ,
кандидат технических наук В.И.ПАНЧИШИН

Киев – 1972

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ
Издание Института математики АН УССР, Киев, 1972

К ВОПРОСУ О ПОГРЕШНОСТЯХ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ

Н.В.НЕСТЕРЕНКО, Б.Б.НЕСТЕРЕНКО

Создание гибридных вычислительных комплексов вызывает определенные трудности, которые накладывают дополнительные требования на характеристики АВМ и ЦВМ. Эти технические требования ставят в жесткое положение аналоговую часть системы, так как именно аналоговая часть реализует численный метод решения уравнений и является основным вычислителем ГВС. В первую очередь это требования высокой точности и надежности моделирующей среды как основы аналогового блока. Поэтому весьма актуальным является оценка погрешностей, возникающих при решении уравнений моделированием на дискретных средах, и разработка моделирующих сред исходя из точности получения результата.

В наиболее общем случае погрешность решения уравнения на гибридном комплексе с сеточной моделирующей средой (МС) на оптронах [1] будем считать состоящей из следующих составляющих:

1) методическая погрешность – ε_M ;

2) погрешность, вносимая заданием граничных и начальных условий, – $\varepsilon_{ну}$;

3) погрешность, вносимая выходным аналого-цифровым преобразователем, – $\xi_п$;

4) погрешность, вносимая моделирующей средой, – $\xi_{мс}$.

Таким образом, общая погрешность может быть определена как

$$\xi = \xi_м^2 + \xi_{ну}^2 + \xi_п^2 + \xi_{мс}^2 . \qquad (1)$$

Для успешного применения элементов оптоэлектроники при построении моделирующих сред [1] необходимо оценить погрешность, вносимую собственно средой в общую погрешность решения. Изучение этого вопроса в значительной степени осложняется отсутствием информации об исследованиях точности и надежности работы оптрона с прямой оптической связью в аналоговом режиме.

Погрешность, вносимую моделирующей средой в решение уравнения, будем определять исходя из погрешности задания основного параметра каждого оптрона – сопротивления фоторезистора $R_{ФП}$.

Выходной параметр оптрона связан с параметрами элементов схемы функциональной зависимостью:

$$R^0_{ФП} = f(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n) .$$

Однако в реальной схеме параметры ϑ_i элементов отличаются от расчетных, поэтому

$$R_{ФП} = f(\vartheta_1 + \Delta\vartheta_1, \vartheta_2 + \Delta\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n + \Delta\vartheta_n),$$

и ошибка в задании основного параметра оптрона определится как разность

$$\Delta R_{ФП} = R_{ФП} - R^0_{ФП} .$$

Часто в инженерной практике оценку погрешности (точности) схем подменяют расчетом в поле допусков или расчетом на максимум-минимум. При этом погрешность в задании основного параметра схемы оценивается по наихудшим для данного параметра отклонениям всех параметров схемы. Принципиальная и практическая необоснованность метода заключается в том, что учитываются практически невероятные сочетания допусков параметров в схеме, что приводит к ложным представлениям о точности схемы.

Более обоснованным решениям приводят вероятностные методы расчета. Причем, как показала практика, [illegible] выходного параметра, определенная [illegible] вероятностная зависимость от первичных [illegible] δy_i, значительно меньше отклонения [illegible], полученного в результате функционального анализа граничной области. Отсюда следует вывод, что требования к параметрам q_i схемы, определяемые [illegible] погрешность схемы, могут быть менее [illegible], что дает [illegible] экономически [illegible] сравнения.

[illegible] зависимость $R_{фп}$ от [illegible] рис. 1 [illegible]

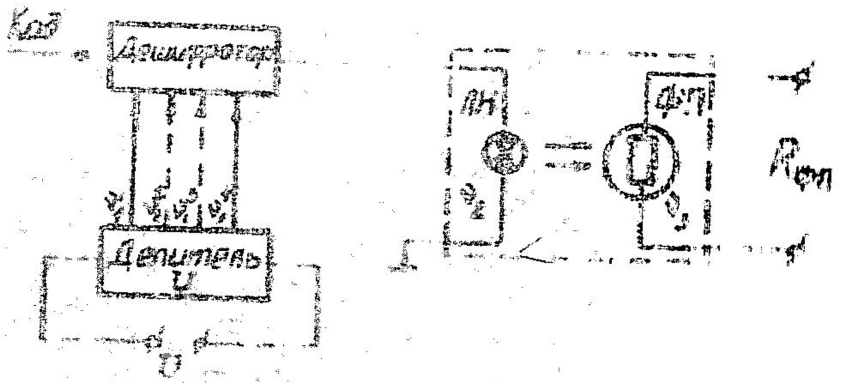

Рис. 1

$$\delta R_{ФП} = f(\delta\nu_1, \delta\nu_2, \delta\nu_3),$$

где $\delta\nu_1$ -отклонение напряжения делителя от номинального , $\delta\nu_2$ -отклонение параметров источника светового излучения, $\delta\nu_3$ -отклонение параметров фотоприемника.

Следует отметить, что подавляющее влияние на отклонение $\delta R_{ФП}$ оказывает составляющая $\delta\nu_1$. Это обусловлено разрешающей способностью делителя напряжения

$$P = \frac{U_{пит}}{K},$$

(где $U_{пит}$ - напряжение на делителе, k - число выходов из делителя) и отклонением напряжения, снимаемого с выхода, имеющего номер m ;

$$U_m = P \cdot m$$

от номинального, необходимого для задания требуемой величины $R^0_{ФП}$.

Для МС на оптронах с лампой накаливания НСМ6, 3-20 и фоторезистором СФ2-16 с числом узловых точек 10x10 при максимальной яркости источников светового излучения, что соответствует $R_{ФП}$ = 5000 ом, и при P =50 мв была снята совокупность отклонений параметров $(R_{ФП})_i$ оптронов от $R^0_{ФП}$. Для проверки гипотезы нормального закона распределения разброса параметров использовался критерий согласия χ^2 , представляющий собой сумму отношений квадратов разностей между частотами эмпирического и теоретического распределения к частотам теоретического распределения:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \frac{\left[m_i - F_i(x)N\right]^2}{F_i(x)N}.$$

где m_i - эмпирическая частота, $F_i(x)N$ - теоретическая частота, N - число наблюдений, $\mathcal{L}$ - число интервалов.

Гипотеза нормального закона распределения подтвердилась, что дает возможность, используя вероятностные характеристики, определить погрешность, вносимую моделирующей средой в решение задачи.

В качестве основного параметра моделирующей среды, по которому будем оценивать погрешность, выбираем напряжение U в узлах сетки. Погрешность среды будем оценивать на основании анализа степени влияния разброса параметров оптрона $R_{ФП}$ на основной параметр среды.

При малых изменениях $R_{ФП}$ чувствительность U к параметру $(R_{ФП})_k$ определится как

$$\eta_{(R_{ФП})_k} \approx \frac{\dfrac{\Delta U}{U}}{\dfrac{\Delta (R_{ФП})_k}{(R_{ФП})_k}}, \qquad (2)$$

где U - основной параметр среды, $(R_{ФП})_k$ - сопротивление k-го оптрона, $\Delta U, \Delta(R_{ФП})_k$ - абсолютные приращения основного параметра среды и сопротивления k-того оптрона.

Степень чувствительности моделирующей среды к вариации параметров $\Delta R_{ФП}$ элементов среды может быть охарактеризована коэффициентами влияния [2], которые определяются как частные производные:

$$W_{(R_{ФП})_k} = \left[\frac{\partial U}{\partial (R_{ФП})_k}\right] \cdot \Delta(R_{ФП})_k \cdots \Delta(R_{ФП})_N, \qquad (3)$$

$$k = 1, 2, \ldots, N.$$

В этом случае абсолютная погрешность основного параметра моделирующей среды при вариации параметров $\Delta R_{ФП}$ оптронов определяется выражением:

$$\Delta U = \sum_{k=1}^{N} W_{(R_{ФП})_k} \cdot \Delta(R_{ФП})_k. \qquad (4)$$

Таким образом, при вычислении абсолютной погрешности основного параметра среды ΔU коэффициент влияния $W_{(R_{ФП})_k}$ характеризует степень влияния k-того оптрона.

Так как значения сопротивлений $R_{ФП}$ элементов среды являются случайными величинами с нормальным законом распределения, следовательно, погрешность основного параметра среды ΔU тоже будет случайной величиной. Ввиду того, что погрешность ΔU обусловлена большим количеством первичных погрешностей $\Delta(R_{ФП})_k$, естественно предположить в качестве [illegible] [illegible] дисперсией σ^2.

[illegible]

[illegible]

$$[illegible] \qquad (5)$$

$$[illegible] \qquad (6)$$

где $M(R_{ФП})$, $\sigma^2(R_{ФП})$ — математическое ожидание и дисперсия распределения сопротивлений оптронов.

Формулы (5) и (6) определяют соответственно математическое ожидание и дисперсию погрешности основного параметра моделирующей среды.

Основная трудность вычисления a_U и σ_U^2 связана с определением коэффициентов влияния $W_{(R_{ФП})_k}$. Для определения $W_{(R_{ФП})_k}$ могут быть применены либо метод преобразованных схем [2], либо матричный метод. В том случае, когда первичные ошибки элементов известны, расчет погрешности моделирующей среды может быть проведен по формулам, приведенным в [2].

Оценим погрешность исследуемой моделирующей среды для случая

$$\frac{\Delta (R_{фп})_k}{(R_{фп})_k} = 3\% ,$$

используя формулу критерия точности, полученную для квадратной сетки:

$$\xi_{MC} = 0{,}728 \frac{\Delta U_{max}}{U_{max} - U_{min}} \cdot \frac{\Delta q}{q} , \qquad (7)$$

где ΔU_{max} – максимальная разность потенциалов между соседними узлами сетки, U_{max}, U_{min} – максимальное и минимальное значения потенциалов на сетке, $\frac{\Delta q}{q}$ – относительный допуск на величину параметра оптронов $R_{фп}$.

Исходя из технических условий на фоторезистор СФ 2-18, задаемся максимальной величиной напряжения граничных условий, равной 10 вольт. В этом случае

$$U_{max} - U_{min} = 10\ в ,$$

$$\Delta U_{max} = 1\ в ,$$

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta (R_{фп})}{R_{фп}} = 3\% .$$

После подстановки в (7) значений $U_{max} - U_{min}$, ΔU_{max} и величины допуска на значение сопротивления фоторезистора получим значение погрешности моделирующей среды

$$\xi_{MC} = 0{,}2\% .$$

Таким образом, можно сделать заключение, что погрешность моделирующей среды даже при 3%-ном отклонении сопротивления элтрона от номинала является достаточно малой величиной. Проведение подобных оценок позволяет более рационально подходить к требованиям точности элементов при построении конкретных моделирующих сред.

Литература

1. Несторенко Г.Э., Некоторые вопросы применения фоторезисторов в моделирующих устройствах, В сб. "Методы и средства решения краевых задач", РПИ, Рига, 1970.

2. Быховский М.Л., Точность электрических сеток, предназначенных для решения уравнений Лапласа, Известия ОТН АН СССР, 14, 1950.