УДК 517.54

В. М. Сафонов

ТЕОРЕМА О ПРОДОЛЖЕНИИ ВНУТРЕННИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Известно, что важными для приложений в анализе (после аналитических) являются внутренние отображения двумерных ориентируемых многообразий [1], которые характеризуются двумя свойствами: они открыты и нуль-мерны (т. е. образ открытого множества открыт и прообраз каждой точки имеет нулевую размерность [2]). Теорема Стоилова утверждает, что каждое внутреннее отображение топологически эквивалентно некоторому аналитическому и, конечно, наоборот.

Особенно полезными для этих приложений являются различные критерии продолжимости внутренних отображений [3] (фактически теоремы о стираемости особенностей). Нашей целью здесь будет установление одного из таких критериев. Заметим, что теоремы о продолжении носят локальный характер, поэтому достаточно формулировать их для отображений плоских областей.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ – открытая область, под z – плоскостью (W – плоскостью) понимаем комплексную плоскость, содержащую $\mathcal{D}$ (образ $\mathcal{D}$ при непрерывном отображении $f:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$).

Определение. Непрерывное отображение $f:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ области $\mathcal{D}$ обладает свойством τ в точке z_0, если через эту точку проходит простая дуга $\ell(z_0)=\overline{\alpha\beta}$ такая, что:

1) z_0 является внутренней точкой дуги $\ell(z_0)$;

2) $\mathcal{D}\setminus\ell(z_0)$ – несвязное множество;

3) простые дуги $\ell_1(z_0)=\overline{\alpha z_0}$ и $\ell_2(z_0)=\overline{z_0\beta}$ расположены в паре вертикальных углов соответственно $\omega_1(z_0)$ и $\omega_2(z_0)$ раствора меньше π с вершинами в точке z_0;

4) образ дуги $\ell(z_0)$ есть кривая $L(W_0)$ такая, что образы $L_1(W_0)=f(\ell_1(z_0))$ и $L_2(W_0)=f(\ell_2(z_0))$ лежат в вертикальных углах соответственно $\Omega_1(W_0)$ и $\Omega_2(W_0)$, меньших π, с вершинами в точке $W_0=f(z_0)$.

Основная цель работы состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема. Пусть $f:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ – непрерывное отображение, внутреннее на дополнении к некоторому замкнутому нульмерному множеству P.

Если отображение f обладает свойством τ в каждой точке множества P, исключая не более чем счетное его подмножество, то оно является внутренним во всей области $\mathcal{D}$.

Замечание. Отметим, что, не нарушая общности, можно считать нульмерное множество особенностей P совершенным, так как изолированные точки P стираются применением теоремы о стирании [4], без использования даже свойства τ.

Поскольку доказательство теоремы довольно длинное, разобьем его на ряд лемм, представляющих и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть $f: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ – непрерывное отображение и $P \subset \mathcal{D}$ – произвольное совершенное множество. Пусть, далее, f обладает свойством τ во всех точках множества $N \subset P$ не первой категории на P.

Тогда найдутся порция $P' \subset P$ и числа $\sigma, \delta > 0$ такие что через каждую точку $z \in P'$ проходит простая дуга $\ell(z)$ со свойствами, указанными в определении, и обладающая следующими свойствами:

1) $[\omega_i(z') \hat{,} \omega_i(z'')] < \sigma$ для любых точек $z', z'' \in P'$, где величина в квадратных скобках понимается как угол между биссектрисами углов $\omega_i(z')$ и $\omega_i(z'')$ с вершинами в точках z' и z'', где $i = 1, 2$ и $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ – вертикальные углы, в которых расположена дуга $\ell(z)$;

2) расстояние множества P' до границы области $\mathcal{D}$ больше δ;

3) если $P_1' = f(P')$, то из каждой точки $W = f(z) \in P_1'$, как из вершины, исходит пара вертикальных углов $\Omega_1(W)$ и $\Omega_2(W)$ раствора $\pi - \sigma$, полученная параллельным переносом фиксированной пары вертикальных углов Ω_1 и Ω_2 и обладающая тем свойством, что образы $L_1(W)$ и $L_2(W)$ частей $\ell_1(z)$ и $\ell_2(z)$ простой дуги $\ell(z)$, расположенные в вертикальных углах $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ и имеющих длину δ, при отображении f лежат внутри вертикальных углов $\Omega_1(W)$ и $\Omega_2(W)$ соответственно.

Доказательство. В z- и W- плоскостях фиксируем определенные прямые t_0 и T_0 соответственно и обозначаем через $N(n, \nu, p, q)$ множество точек $z \in N$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$A) \quad \left| \{t_0, \hat{\ } \omega_i(z)\} - \frac{n}{400p} \right| < \frac{1}{400p},$$

где через $\{t_0, \hat{\ } \omega_i(z)\}$ обозначена величина угла между прямой t_0 и биссектрисой угла $\omega_i(z)$, отсчитываемого в положительном направлении от биссектрисы, заключенная между 0 и 2π (включая 0), $i = 1, 2$, причем $1/100p < \omega_i < \pi - 1/100p$ и $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ – вертикальные углы, в которых расположены части $l_1(z)$ и $l_2(z)$ простой дуги $l(z)$, проходящей через точку z.

B. Пара вертикальных углов $\Omega_i'(W)$ $(i=1,2)$ с вершинами в точке $W=f(z)$ и раствора $\pi - 1/100p$ содержит образы $L_1(W)$ и $L_2(W)$ частей простой дуги $l(z)$: $l_1(z)$ и $l_2(z)$, расположенные в паре вертикальных углов $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$, длины $1/q$, причем $1/100p < \Omega_i < \pi - 1/100p$

$$\text{C}: \left| \left\{ T_0, \widehat{\ }\Omega_i(W) \right\} - \frac{\nu}{200p} \right| < \frac{1}{200p}.$$

Из определения свойства τ и условий леммы следует, что $N = \bigcup N(n,\nu,p,q)$, где суммирование распространено на всевозможные натуральные числа n,ν,p,q.

Так как N не первой категории на P, то найдутся определенные значения n,ν,p,q такие, что соответствующее им множество $N(n,\nu,p,q)$ всюду плотно на некоторой порции $p' \subset P$, причем $p' = P \cap \mathcal{D}'$, где $\mathcal{D}'$ – круг. Очевидно, можно предположить, что расстояние от множества p' до границы области $\mathcal{D}$ больше $1/q$. Для этих чисел положим

$$N(n,\nu,p,q) = N', \ \frac{1}{100p} = \sigma, \ \frac{1}{q} = \delta.$$

Докажем, что для множества p' и так определенных чисел $\sigma, \delta > 0$ имеют место все свойства, указанные в лемме.

Определим в точках $z \in p'$ прямые $\tau(z)$ следующим образом. Полагаем, что $\tau(z)$ – биссектрисы пар вертикальных углов $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ с вершинами в точках $z \in p' \cap N'$. Теперь рассмотрим точки $z \in p' \setminus N'$. По теореме о сходимости континуумов [5] для каждой из этих точек можно взять проходящий через нее континуум – одно из предельных положений простых дуг $l(z')$, проходящих через точки $z' \in N'$, где точки z' сходятся к точке z, и удовлетворяющих условиям определения свойства τ. В каждый такой континуум можно вписать простую дугу, расположенную в некоторой паре вертикальных углов. Теперь для точек $z \in \rho' \setminus N'$ в качестве $\tau(z)$ возьмем биссектрисы этих пар вертикальных углов. Такое определение корректно в силу плотности N' на ρ'.

Из неравенств A следует, что $[\tau(z'), \hat{}\,\tau(z'')] \leq 1/200p$ для всех точек $z', z'' \in \rho'$. Отсюда и из определения числа σ следует свойство 1) леммы. Так как расстояние от ρ' до границы области $\mathcal{D}$ больше $1/q$, то выполнено и свойство 2).

Докажем теперь свойство 3) леммы. Возьмем произвольную точку $z_0 \in N'$ и построим соответстеующую ей пару вертикальных углов раствора $\pi - 1/100p$, имеющих общую биссектрису с парой вертикальных углов $\Omega_i(w_0)$, где $w_0 = f(z_0)$ и $i = 1, 2$. Из неравенств C следует, что пара вертикальных углов $\Omega_i(w_0)$ $(i = 1, 2)$, перенесенная параллельно в любую точку $w \in \rho_1'$, содержит пару вертикальных углов $\Omega_i'(w)$ $(i = 1, 2)$. Отсюда и из B следует, что образы $L_1(w')$ и $L_2(w')$ частей $\ell_1(z')$ и $\ell_2(z')$ простой дуги $\ell(z')$, имеющих длину $1/q = \delta$, при отображении f будут расположены в паре вертикальных углов $\Omega_i(w')$ $(i = 1, 2)$. При этом $z' \in N'$, $w' = f(z')$ и $\ell_1(z')$ и $\ell_2(z')$ лежат в паре вертикальных углов $\omega_1(z')$ и $\omega_2(z')$ соответственно. В силу непрерывности f и определения $\tau(z)$ для $z \in \rho' \setminus N'$ сразу следует свойство 3). Тем самым лемма доказана.

Предположим, что теорема неверна. Тогда можем предположить, что множество ρ такое, что ни в какой окрестности любой его точки отображение f не является внутренним. По лемме 1 мы можем считать, что область $\mathcal{D}$ – круг и ρ удовлетворяет условиям 1)–3) леммы. Мы покажем, что в этом круге отображение является внутренним, что и явится искомым противоречием.

Возьмем, далее, произвольную точку $z \in \rho$; через нее проходит простая дуга $\ell(z) = \overline{\alpha\beta}$ такая, что части этой дуги $\ell_1(z) = \overline{\alpha z}$ и $\ell_2(z) = \overline{z\beta}$ расположены в паре вертикальных углов $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$, направление биссектрисы которых примем за направление оси OX. Пусть угол $\omega_1(z)$ расположен слева, а угол

$\omega_2(z)$ – справа от прямой, проходящей через z параллельно оси OY (считая ось OY направленной вертикально вверх, а ось OX – вправо). Образы $L_1(w)$ и $L_2(w)$ частей $\ell_1(z)$ и $\ell_2(z)$ дуги $\ell(z)$ лежат в вертикальных углах $\Omega_1(w)$ и $\Omega_2(w)$ соответственно. И пусть также в W – плоскости направление биссектрисы углов $\Omega_i(w)$ $(i = 1, 2)$ есть направление оси абсцисс, а углы $\Omega_1(w)$ и $\Omega_2(w)$ расположены слева и справа соответственно от прямой, проходящей через точку $w = f(z)$ и параллельной оси ординат.

Замечание. Любую пару вертикальных углов, меньших π, в которых расположена кривая, всегда можно дополнительным гомеоморфизмом вида $u = x$, $v = ky$ перевести в пару вертикальных углов достаточно малого раствора. Поэтому в дальнейшем мы будем считать указанные выше в определении вертикальные углы меньше некоторого фиксированного, но достаточно малого $\sigma > 0$.

Вернемся к условиям нашей теоремы. Всегда можно предполагать, что отображение f является собственным (т. е. прообраз произвольного компакта – компакт). Это легко следует из нульмерности f, так как тогда согласно [6] для произвольной точки $z \in \mathcal{D}$ можно найти окрестность, ограничение f на которую собственно. Поэтому в силу локального характера теоремы мы можем априори предполагать собственность f.

Рассмотрим систему (Δ) всевозможных равнобедренных подобных треугольников. Каждый из этих треугольников имеет ось симметрии – горизонталь, а угол при вершине больше 100σ. Пусть G – один из таких треугольников, $G \subset \operatorname{Int} f(\mathcal{D})$. Предполагаем также G настолько малым, что простые дуги, проходящие через особые точки компонент $g \subset U = f^{-1}(G)$ и удовлетворяющие условиям свойства τ, имели точки пересечения (если это имеет место вообще) в области $\mathcal{D}$. Обозначим вершины этого треугольника через A, B и C, где $\overline{AB}$ – его основание.

Лемма 2. Не существует области g' такой, что образ $f(\partial g')$ ее границы $\partial g'$ принадлежит какой-нибудь вертикальной прямой или $f(\partial g')$ – подмножество $\overline{AC} \cup \overline{BC}$.

Доказательство. Предположим противное и пусть g' – такая область. Тогда образ границы $f(\partial g')$ принадлежит какой-нибудь вертикали Λ либо является подмножеством $\overline{AC} \cup \overline{BC}$ в W – плоскости. Поэтому граничные точки континуума $\overline{G'} = \overline{f(g')}$, отличные от точек вертикали Λ либо от точек множества $\overline{AC} \cup \overline{BC}$, должны соответствовать только точкам из множества $\rho \cap g'$.

Пусть имеет место первое. Будем помещать две вертикали, находящиеся вне множества $\overline{G'} = \overline{f(g')}$ слева и справа соответственно от него, параллельно самим себе по направлению к континууму $\overline{G'}$. Тогда существует такое положение одной из этих вертикалей, когда на ней найдется граничная точка $W \in \overline{G'} \setminus \Lambda$, которой может соответствовать только точка $z \in \rho \cap g'$. Поэтому некоторые начальные криволинейные отрезки $\ell_1(z)$ и $\ell_2(z)$ простой дуги $\ell(z)$, расположенные внутри вертикальных углов $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ соответственно, целиком лежат в области g' и, следовательно, их образы $L_1(W)$ и $L_2(W)$, являющиеся (в силу нульмерности f) невырожденными континуумами и находящиеся в соответствующих углах $\Omega_1(W)$ и $\Omega_2(W)$, должны принадлежать $\overline{G'} = \overline{f(g')}$. Но это противоречит тому, что угол $\Omega_1(W)$ либо угол $\Omega_2(W)$ (в зависимости от того, принадлежит точка W левой или правой вертикали) находится вне $\overline{G'}$ (исключая вершину W).

Во втором случае будем перемещать углы $Q_1(W_1)$ и $Q_2(W_2)$ с вершинами W_1 и W_2, лежащими слева и справа от $\overline{G'} = \overline{f(g')}$ соответственно, и со сторонами, которые не содержат ни одной точки множества $\overline{G'}$ и параллельны соответственно отрезкам $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, по величине равные углу при вершине C треугольника G, вдоль их общей биссектрисы, являющейся биссектрисой и для угла при вершине C, по направлению к континууму $\overline{G'} = \overline{f(g')}$. Тогда существует такая первая точка W_0 на биссектрисе, что на одной из сторон либо угла $Q_1(W_0)$, либо угла $Q_2(W_0)$ найдется граничная точка $W' \in \overline{G'} \setminus (\overline{AC} \cup \overline{BC})$, которой может соответствовать только точка $x' \in P \cap g'$. Рассуждения для криволинейных отрезков $\ell_1(x')$ и $\ell_2(x')$, расположенных внутри вертикальных углов $\omega_1(x')$ и $\omega_2(x')$, аналогичные приведенным в первом случае, приводят и этот случай к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3. Компоненты открытого множества $\mathcal{O} = f^{-1}(G)$ суть жордановы области.

Доказательство. Из собственности f следует, что $\bar{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}$, причем $\bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$ отображается в границу треугольника ∂G. Ясно также, что $f(\bar{\mathcal{O}}) \subset \bar{G}$. Теперь покажем, что граничной точке ∂G могут соответствовать только граничные точки $\bar{\mathcal{O}}$.

В силу собственности f достаточно показать, что множество $\mathcal{O}$ не имеет "внутренних" граничных точек, т. е. граничных точек, являющихся внутренними точками замыкания $\bar{\mathcal{O}}$. Действительно, пусть z_0 – такая точка некоторой компоненты $g \subset \mathcal{O}$. Тогда ясно, что некоторые начальные части $\ell_1(z_0)$ и $\ell_2(z_0)$ простой дуги $\ell(z_0)$, лежащие в паре вертикальных углов $\omega_i(z_0)$ $(i = 1, 2)$ соответственно, находятся в замыкании области $\bar{g}$, и, следовательно, их образы $L_1(w_0)$ и $L_2(w_0)$, где $w_0 = f(z_0)$ (лежащие в паре вертикальных углов $\Omega_i(w_0)$ $(i = 1, 2)$) должны принадлежать замыканию области $\bar{G}$ – треугольнику, что противоречит свойству его границы $\partial \bar{G}$.

Итак, в любой окрестности каждой граничной точки множества $\mathcal{O}$ имеются точки, внешние относительно $\mathcal{O}$.

Покажем теперь, что замыкание $\bar{g}$ любой компоненты из $\mathcal{O}$ не разбивает z - плоскости. Поскольку $\bar{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}$, то и $\bar{g} \subset \mathcal{D}$. Кроме того, можно считать $\mathcal{D}$ односвязной областью, так как всегда можно выбрать односвязную окрестность особой точки, содержащуюся в $\mathcal{D}$, и поскольку теоремы о продолжении носят локальный характер, то эту окрестность можно рассматривать в качестве исходной области $\mathcal{D}$. Поэтому существует лишь одна компонента g^0 дополнения $C\bar{g}$, содержащая бесконечно удаленную точку и $\bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. Таким образом, достаточно показать, что $Cg^0=\bar{g}$.

Допустим противное. Тогда либо множество $Cg^0\setminus\bar{g}$ содержит хотя бы одну ограниченную компоненту g' открытого множества $C\bar{\sigma}$, либо $(Cg^0\setminus\bar{g})\cap C\bar{\sigma}=\phi$.

Если имеет место первое, то найдем ограниченную компоненту $g'\subset C\bar{\sigma}$, лежащую строго внутри $\mathcal{D}$, такую, что ее граница $\partial g'$ – континуум, все точки которого являются граничными либо только для компонент множества σ, либо как для компонент множества σ так и для компонент множества $C\bar{\sigma}$, отличных от g' [6].

Образ этого континуума (в силу нульмерности f) есть невырожденный континуум, принадлежащий (в силу собственности f) границе ∂G треугольника G. Из определения области $g'\subset\mathcal{D}\setminus\sigma$ следует, что ее образ G' полностью расположен вне треугольника G.

Здесь возможны только два случая:

1) множество $f(\partial g')$ содержит лишь точки стороны $\overline{AB}$;

2) граница $\partial G'$ образа g' содержит точки боковых сторон: $\overline{AC}\cup\overline{BC}$, отличные от точек A и B.

Поскольку граница $\partial g'$ отображается в границу ∂G, то в силу леммы 2 первый случай невозможен, а второй приводится к противоречию аналогично второму случаю леммы 2.

Пусть теперь имеет место $(Cg^0\setminus\bar{g})\cap C\bar{\sigma}=\phi$. Тогда найдется ограниченная компонента $g_1\subset\sigma=f^{-1}(G)$ такая, что $g_1\subset Cg^0\setminus\bar{g}$ и имеет своей границей континуум, все точки которого являются граничными либо только для g, либо для g и для других компонент множества σ. Выделим подконтинуум $K_1\subset\partial g_1$ такой, что $K_1\subset\partial g$. Поскольку P – нульмерное множество, то можно выбрать открытый круг $K(z_0)$ с центром в точке $z_0\in K_1$, содержащий лишь точки множества $\bar{g}\cup\bar{g}_1$, такой, что f будет однолистным на нем. Легко видеть, что образ $f(K(z_0))=K'(w_0)$ (где $w_0=f(z_0)\in\in\partial G$) содержит точки $w\notin\bar{G}$, что противоречит самому выбору круга $K(z_0)$.

Наконец, покажем, что каждая компонента $g \subset U = f^{-1}(G)$ является жордановой областью. Так как $\bar{g}$ — континуум, не разбивающий плоскость, то дополнение $h = C\bar{g}$ (до расширенной плоскости) есть односвязная область, граница которой ∂h совпадает с границей ∂g области g. Это следует из того, что g не имеет "внутренних" граничных точек. Поэтому достаточно доказать, что ∂h есть простая замкнутая кривая.

Предположим противное и пусть $K = \lim_{n\to\infty} K_n$ — континуум конденсации [7], где $K \subset \partial g, K_n \subset \partial g$ и $K_m \cap K_n = \phi$ для $m \neq n$. Поскольку P — нульмерно, то можно выделить открытый круг $K(z')$ с центром в точке $z' \in K$, в котором f однолистно, причем так, чтобы множество $K' = \overline{K(z')} \cap K$ разбивало круг на две части. Ясно, что, начиная с некоторого номера n_0, $K'_n = \overline{K(z')} \cap K_n = \phi$ $(n > n_0)$. Очевидно также, что $\lim_{n\to\infty} K'_n = K'$, где $K'_n, K' \subset \partial g$ и $K'_m \cap K'_n = \phi$ $(m \neq n)$. Образ $f(K') = \lambda' \subset \partial G$ представляет собой ломаную, причем $\lambda' \subset f(\overline{K(z')}) = \overline{f(K(z'))}$. Пусть $\lambda'_0 \subset \subset \lambda' \cap f(K(z'))$ — отрезок. Построим открытый круг $K'(w_0) \subset f(K(z'))$, где w_0, λ'_0 — его центр и диаметр соответственно. Рассмотрим $f^{-1}(K'(w_0)) = K(z_0) \subset K(z')$ — топологический круг, где $w_0 = f(z_0) \in \lambda'_0$. Поскольку f однолистно в $\overline{K(z_0)} \subset K(z')$ и $\lambda'_0 \subset f(K')$, то $f^{-1}(\lambda'_0) \cap \overline{K(z_0)} = \overline{K(z_0)} \cap K' \equiv K'' \neq \phi$. Таким образом, $f(K'') = \lambda'_0$ и, начиная с некоторого номера n_0, $\overline{K(z_0)} \cap K'_n = K''_n \neq \phi$ (так как $K'' \subset K$ — континуум конденсации), причем $K''_m \cap K''_n = \phi$ для $m \neq n$. Отсюда и из того, что $f(K''_n) \subset \partial G$, следует, что $f(K''_n) \subset \lambda'_0$. Но это противоречит однолистности f в топологическом круге $K(z_0)$.

Лемма доказана.

Пусть $g \subset f^{-1}(G)$, $f(g) = G$ и $\partial g \cap P \cap f^{-1}(A) \neq \phi$, $\partial g \cap P \cap f^{-1}(B) \neq \phi$. Рассмотрим точки a и b, где $a \in \partial g \cap P \cap f^{-1}(A)$, $b \in \partial g \cap P \cap f^{-1}(B)$. Ясно, что отображение f обладает свойством c в точках a и b

причем $\ell(a)\cap g=\phi$, $\ell(b)\cap g=\phi$, $\ell_1(a)\cap\ell_2(b)=\phi$, $\ell_2(a)\cap\ell_1(b)=\phi$ (в силу выбора треугольника G). Из двух дуг, на которые разбивается граница ∂g точками a и b , назовем левой ту, которая вместе с простыми дугами $\ell_1(a)$ и $\ell_1(b)$ образует замкнутую криволинейную полуполосу так, чтобы последняя не содержала всей границы ∂g . Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Пусть точка $a'\in(\overline{ab}\setminus(a\cup b))\cap P$, где $\overline{ab}$ – левая дуга (в указанном выше смысле) на границе ∂g , такая , что $f(a')\in\overline{AB}$. Тогда либо $\ell_2(a')\cap\ell_1(a')\neq\phi$, либо $\ell_2(a')\cap\ell_1(b)\neq\phi$.

Доказательство. Из условий леммы ясно, что $\ell_2(a')\cap g=\phi$. Проведем вертикальную прямую L через точку a'. Покажем, что , по крайней мере, одно из множеств $\overline{aa'}\setminus a'$, $\overline{ba'}\setminus a'$, находится целиком в правой полуплоскости относительно вертикали L и не имеет общих точек с последней.

Предположим противное. Тогда возможны только следующие случаи:

1) множество $\overline{ab}\setminus a'$ лежит в левой полуплоскости относительно вертикали L и $(\overline{ab}\setminus a')\cap L=\phi$;

2) $(\overline{aa'}\setminus a')\cap L\neq\phi$ и $(\overline{ba'}\setminus a')\cap L\neq\phi$;

3) множество $\overline{aa'}\setminus a'$ (либо $\overline{ba'}\setminus a'$) находится в левой полуплоскости относительно вертикали L , $(\overline{aa'}\setminus a')\cap L=\phi$ (либо $(\overline{ba'}\setminus a')\cap L=\phi$) и $(\overline{ba'}\setminus a')\cap L\neq\phi$ (либо $(\overline{aa'}\setminus a')\cap L\neq\phi$).

Поскольку $\overline{ab}$ – левая (в указанном выше смысле) дуга на границе ∂g и простая дуга $\ell_2(a')$ находится в правой полуплоскости относительно вертикали L , то в каждом из упомянутых случаев, как легко видеть, будет обязательно выполняться: $\ell_2(a')\cap g\neq\phi$. Но это противоречит условию леммы.

Итак, хотя бы одно из множеств $\overline{aa'}\setminus a'$, $\overline{ba'}\setminus a'$ лежит в правой полуплоскости относительно L и не имеет общих точек с L . Тогда ясно, что либо $\bar g'\cap\ell_2(a')\neq\phi$, либо $\bar g''\cap\ell_2(a')\neq\phi$, где $\bar g'$, $\bar g''$ – замкнутые жордановы области такие, что $\partial g'\subset L\cup\partial g\cup\ell_1(a)$, $\partial g'\cap\ell_1(a)\neq\phi$, $a'\in\partial g'$ и $\partial g''\subset L\cup\partial g\cup\ell_1(b)$, $\partial g''\cap$

$\cap\, l_1(b)\neq\phi,\ a'\in\partial g''$. Отсюда и из того, что в точке a' отображение f обладает свойством $\mathcal{C}$, причем $l_2(a')\cap g=\phi$ и $\overline{ab}$ – левая (в указанном выше смысле) дуга на границе ∂g, следует, что либо $l_2(a')\cap$ $\cap\, l_1(a)\neq\phi$ либо $l_2(a')\cap l_1(b)\neq\phi$.

Лемма доказана.

Понятно, что аналогично можно ввести понятие правой дуги на границе ∂g и доказать для нее соответствующую лемму. В этом случае уже будут фигурировать соотношения $l_1(a')\cap l_2(a)\neq\phi$, $l_1(a')\cap l_2(b)\neq\phi$.

Обозначим через $\deg f$ степень отображения $f: A\to B$, где A, B –окружности S^1, отрезки $[a,b]$ или плоские жордановы области [8].

Лемма 5. Если при отображении окружностей $f: S^1\to S^1$ имеется, по крайней мере, одна точка взаимной однозначности, то степень этого отображения равна ± 1 или нулю.

Доказательство. Отображение f можно представить как суперпозицию двух отображений $\varphi\circ\psi$, где ψ – отображение отрезка $[a,b]$ в себя со свойством $\psi(a\cup b)\subset a\cup b$, а отображение φ склеивает крайние точки $\varphi(a)=\varphi(b)$. Степень отображения f совпадает со степенью отображения ψ, которое легко вычисляется:

$$\deg\psi=\begin{cases}1, & \text{если } \psi(a)=a,\ \psi(b)=b,\\ -1, & \text{если } \psi(a)=b,\ \psi(b)=a,\\ 0, & \text{если } \psi(a)=\psi(b).\end{cases}$$

Замечание. Если отображение f в условиях леммы является монотонным, то степень этого отображения может равняться только ± 1.

Лемма 6. Если прообраз некоторой дуги окружности S^1 при отображении $f: S^1\to S^1$ связен и не совпадает с S^1, то степень отображения f равна ± 1 или нулю.

Доказательство следует из того, что это отображение гомотопно эквивалентно [8] отображению леммы 5. Достаточно стянуть эту дугу и ее прообраз в точки. При этом степень в точности равна степени отображения прообраза на эту дугу.

Если для произвольного достаточно малого треугольника из системы (Δ) для всех компонент прообраза степень отображения больше или равна нулю, то согласно критериям существования локальной степени [9] для произвольных точек $y \in f(\mathcal{D})$ и $x \in f^{-1}(y)$ существует локальная степень отображения $\gamma(x) > 0$, и, следовательно, отображение f внутреннее на $\mathcal{D}$. Поэтому, так как мы предположили наличие особого множества P, существует треугольник G из (Δ) и компонента его прообраза g, отображающаяся на G с отрицательной степенью. Зафиксируем эту компоненту g. Тогда для нее справедлив ряд лемм.

Но, прежде чем приступить к формулировке этих лемм, необходимо заметить следующее. Пусть ориентация границ ∂g и ∂G задана положительной ориентацией областей g и G. Далее, поскольку P – нульмерно, то точки множества $P \cap \partial g$ можно покрыть системой малых замкнутых дуг $\{\sigma_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ так, чтобы $\partial g \setminus \bigcup_i \sigma_i = \bigcup_j \gamma_j \neq \emptyset$, где через γ_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ обозначены невырожденные интервалы (дуги), не содержащие точек множества P, смежные к дугам σ_i. Эти интервалы в дальнейшем будем называть регулярными интервалами. Ясно также, что с самого начала можно выбрать конечную систему покрывающих дуг.

Так как из условий теоремы следует, что отображение f в дополнении $\mathcal{D} \setminus P$ является внутренним фиксированной ориентации в каждой его точке (не нарушая общности можно считать ее положительной) и любой интервал γ_j точек множества P не содержит, то ограничение f на регулярные интервалы границы ∂g будет когерентно ориентировано. Поэтому степень отображения всякого регулярного интервала также является положительной, т.е. $\deg f/_{\gamma} = +1$.

Итак, справедлива следующая лемма.

Лемма 7. Множество $f^{-1}(A) \cap \partial g \cap P$ состоит из одной точки.

Доказательство. Поскольку компонента $g \subset O = f^{-1}(G)$ отображается с отрицательной степенью, то найдется компонента $\overline{ab}$ (где $f(a)=A$ и $f(b)=B$) множества $f^{-1}(\overline{AB})$ на жордановой (в силу леммы 3) границе ∂g такая, что $\deg f/_{\overline{ab}}=-1$.

Точки $a, b \in P$. Действительно, допустим, что один из концов дуги $\overline{a,b}$, например, a, есть регулярная точка и пусть при движении по границе ∂g от точки a к точке b область g находится слева. Тогда рассмотрим регулярный интервал $\gamma_j \equiv \gamma$ такой, что $\overline{\gamma} \ni a$ и $\gamma \subset \overline{ab}$. Такой интервал всегда можно выбрать в силу того, что $a \notin P$. Поскольку $\deg f/_{\overline{ab}}=-1$ и γ выбран как регулярный интервал, то степень отображения $f/_\gamma$ должна быть отрицательной $(\deg f/_\gamma = -1)$. Но это противоречит тому, что степень отображения всякого регулярного интервала строго положительна.

Докажем лемму от противного и пусть точка $a' \in \partial g \cap P$ такая, что $a' \neq a$ и $f(a')=A$.

Точки a и b расположены на границе ∂g так, что простые дуги $l(a)$ и $l(b)$ лежат вне области g и $l_1(a) \cap \cap l_2(b)=\phi$, $l_2(a) \cap l_1(b) = \phi$. Это легко следует из того факта, что для точек $a, b \in P$ (где $f(a)=A$ и $f(b)=B$) выполняется свойство τ и отрезок $\overline{AB}$ находится на вертикали.

В силу предположения и свойства τ простая дуга $l(a')$ должна находиться вне области g. Отсюда и из леммы 4 ясно, что возможны следующие случаи, взаимно исключающие друг друга:

1) $l_1(a') \cap l_2(b) \neq \phi$;

2) $l_2(a') \cap l_1(b) \neq \phi$;

3) $l_1(a) \cap l_2(a) \neq \phi$;

4) $l_2(a') \cap l_1(a) \neq \phi$.

Покажем, что все эти случаи противоречивы. В самом деле, пусть имеет место

Случай 1). Тогда образ любой точки множества $l_1(a') \cap l_2(b)$ должен находиться как внутри угла $\Omega_1(A)$, так и внутри угла $\Omega_2(B)$ либо быть точкой A или точкой B. Но это противоречит тому, что углы $\Omega_1(A)$ и $\Omega_2(B)$, в которых лежат целиком образы $L_1(A)=f(l_1(a'))$ и $L_2(B)=f(l_2(b))$ соответственно, имеют разные вершины (соответственно A и B) и находятся в разных полуплоскостях, на которые разбивает W – плоскость прямая, содержащая отрезок $\overline{AB}$.

Рассуждения для точки множества $\ell_2(a')\cap\ell_1(b)$, аналогичные приведенным в случае 1) для точки множества $\ell_1(a')\cap\ell_2(b)$, приводят случай 2) также к противоречию.

В случае 3) точка $a'\in\overline{ab}$. Действительно, пусть это не так. Так как $\deg f/_{\overline{ab}}=-1$, то найдутся точки $z\in P\cap\overline{ab}$ такие, что $f(z)\notin A\cup B$. В силу свойства τ и того, что $f(\overline{ab})=\overline{AB}$ правые криволинейные отрезки $\ell_2(z)$ простых дуг $\ell(z)$, проходящих через эти точки z, будут находиться вне области g. Кроме того, справедливо $\ell_1(a')\cap\ell_2(a)\neq\phi$ и $\ell_1(b)\cap\ell_2(a)=\phi$, $\ell_2(b)\cap\ell_1(a)=\phi$. Отсюда и из леммы 4 следует, что должно выполняться, по крайней мере, одно из соотношений $\ell_2(z)\cap\ell_1(a)\neq\phi$, $\ell_2(z)\cap\ell_1(b)\neq\phi$. Рассуждения для точки множества $\ell_2(z)\cap\ell_1(a)$ либо для точки множества $\ell_2(z)\cap\ell_1(b)$, аналогичные приведенным в случае 1), приводят к противоречию.

Поскольку $a\cup a'\subset\overline{ab}$, $f(a)=f(a')=A$, $f(\overline{ab})=\overline{AB}$ и непрерывное отображение f в дополнении $\mathcal{D}\setminus P$ является внутренним, то найдется такая точка c, что $c\in P\cap(\overline{aa'}\setminus(a\cup a'))\subset\overline{ab}$ и $f(c)=C\neq A$. Следовательно, через точку c проходит простая дуга $\ell(c)$, которая лежит в паре вертикальных углов $\omega_i(c)$ $(i=1,2)$. Так как $f(c)=C\in\overline{AB}\setminus A$, то в силу выбора треугольника G и свойства τ, ясно, что правый криволинейный отрезок $\ell_2(c)$ простой дуги $\ell(c)$, расположенный внутри соответствующего угла $\omega_2(c)$, должен находиться вне области g и поэтому будет пересекать левый криволинейный отрезок $\ell_1(a')$ простой дуги $\ell(a')$ по непустому множеству. В самом деле, проведем вертикальные прямые через точки a, a', c. Вертикали, проходящие через точки a и a', отличны друг от друга, причем та, которая содержит a', лежит правее (поскольку $a\neq a'$ и $\ell_2(a)\cap\ell_1(a')\neq\phi$). В силу выбора точки c ясно, что либо $\ell_2(c)\cap\ell_1(a')\neq\phi$, либо $\ell_2(c)$

имеет непустое пересечение с той частью дуги $\ell_2(a)$, которая лежит в левой полуплоскости относительно вертикали, проходящей через точку a'. Отсюда и из того, что $\ell_1(c)\cap g=\emptyset$, следует, что вертикаль, содержащая точку c, находится левее вертикали, проходящей через a'. Поэтому $\ell_2(c)\cap\ell_1(a')\neq\emptyset$. Рассуждая, далее, так же как и в первых двух случаях, но только относительно точки множества $\ell_2(c)\cap\ell_1(a')$, получаем противоречие и в этом случае.

Итак, рассмотрим последний случай. Поскольку $\ell_1(a)\cap\ell_2(b)=\emptyset$, $\ell_2(a)\cap\ell_1(b)=\emptyset$ и из того, что $\ell_1(a')\cap\ell_2(a)\neq\emptyset$ следует $a'\in\overline{ab}$, то в случае 4) $a'\notin\overline{ab}$. Дуга $\overline{aa'}$, расположенная на жордановой (в силу леммы 3) границе ∂g и несодержащая точки b, либо содержит точки $z\in P$ такие, что $f(z)\neq A$, либо $(\overline{aa'}\setminus(a\cup a'))\cap P=\emptyset$. Пусть имеет место первое. Тогда найдем точку $z'\in P\cap\overline{aa'}$ такую, что $f(z')\neq A$. Здесь может быть или $f(z')\in\overline{AB}\setminus A$ или $f(z')\in(\overline{BC}\cup\overline{AC})\setminus A$. Если $f(z')\in\overline{AB}\setminus A$, то правый криволинейный отрезок $\ell_2(z')$ простой дуги $\ell(z')$, прохощящей через точку z', будет находиться вне области g (в силу выбора треугольника G и свойства τ) и, следовательно, должен (по тем же соображениям, которые имели место в случае 3) при доказательстве того, что $\ell_2(c)\cap\ell_1(a')\neq\emptyset$) пересекать левый криволинейный отрезок $\ell_1(a)$ простой дуги $\ell(a)$ по непустому множеству. Рассуждая далее так же как и в случае 1), но только относительно точки множества $\ell_2(z')\cap\ell_1(a)$ приходим к противоречию.

Если же $f(z')\in(\overline{BC}\cup\overline{AC})\setminus A$, то ясно, что левый криволинейный отрезок $\ell_1(z')$ простой дуги $\ell(z')$ будет находиться вне области g и, следовательно, должен (по соображениям, изложенным в случае 3) при доказательстве $\ell_2(c)\cap\ell_1(a')\neq\emptyset$) пересекать по непустому множеству правый криволинейный отрезок $\ell_2(a')$ простой дуги $\ell(a')$. Рассуждения относительно точки множества $\ell_2(a')\cap\ell_1(z')$ совершенно аналогичны тем, которые проводились в случае 1). Поэтому также пришли к противоречию.

Таким образом, $(\overline{aa'} \setminus (a \cup a')) \cap P = \phi$. Но тогда дуга $\overline{aa'}$ – регулярный интервал и дает положительный привнос при подсчете степени отображения, причем $f(\overline{aa'}) = \partial G$. Поскольку компонента $g \subset \mathcal{O}$ отображается с отрицательной степенью, то найдется, по крайней мере, еще одна компонента $\overline{a''b''}$ (где $f(a'') = A$ и $f(b'') = B$) множества $f^{-1}(\overline{AB})$ на границе ∂g такая, что $\deg f/_{\overline{a''b''}} = -1$, причем $\overline{a''b''} \not\subset \overline{aa'}$.

По тем же соображениям, что и для дуги $\overline{ab}$, имеем теперь для $\overline{a''b''}$ и $\overline{ab}$ следующее. Точки $a'', b'' \in P$ и $\ell_1(a'') \cap \ell_2(b'') = \phi$, $\ell_2(a'') \cap \ell_1(b'') = \phi$, а также $\ell_1(a'') \cap \ell_2(b) = \phi$, $\ell_2(a'') \cap \ell_1(b) = \phi$ и $\ell_1(b'') \cap$ $\cap \ell_2(a) = \phi$, $\ell_2(b'') \cap \ell_1(a) = \phi$. Кроме того, на дуге $\overline{a''b''}$ найдутся точки $z \in P$ такие, что $f(z) \notin A \cup B$ (в силу того, что $\deg f/_{\overline{a''b''}} = -1$) и, следовательно, правые криволинейные отрезки $\ell_2(z)$ простых дуг $\ell(z)$, проходящих через эти точки z, будут лежать вне области g. Отсюда и из того, что $a' \notin \overline{ab}$, видно, что в силу леммы 4 должно выполняться хотя бы одно из соотношений $\ell_2(z) \cap \ell_1(b'') \neq \phi$, $\ell_2(z) \cap \ell_1(a'') \neq \phi$. Рассуждая далее относительно точки множества $\ell_2(z) \cap \ell_1(b'')$ либо точки множества $\ell_2(z) \cap \ell_1(a'')$ так же, как и в первом случае, получаем противоречие.

Тем семым лемма доказана.

Замечание. Аналогично доказывается, что множество $f^{-1}(B) \cap \partial g \cap P$ состоит из одной точки.

Лемма 8. Прообраз точки A не содержит регулярных точек на ∂g.

Доказательство. Воспользуемся для подсчета степени формулой $\deg f = \sum_{x' \in f^{-1} f x} \gamma(x')$, где $\gamma(x)$ – локальная степень отображения [9]. По предположению для $f: \partial g \to \partial G$ с одной стороны $\deg f = -1$. Тогда имеет место равенство

$$-1 = \gamma(a) + \sum_{\substack{x \in f^{-1} f(a) \cap \partial g \\ x \neq a}} \gamma(x).$$

Но так как $\gamma(a) = -1$, а для регулярных точек $x: \gamma(x) > 0$, то это равенство возможно лишь тогда, когда $f^{-1}f(a) \cap \partial g$ не содержит регулярных точек.

Замечание. Аналогично доказывается, что прообраз точки B не содержит регулярных точек на ∂g.

Следствие. Множество $\partial g \cap f^{-1}(\overline{AB})$ состоит из одной компоненты $\overline{ab}$, причем $\deg f/\overline{ab} = -1$.

Для завершения доказательства теоремы нам потребуется теперь следующая лемма.

Лемма 9. Не существует компонент $g \subset U = f^{-1}(G)$, границы образов которых $\partial f(g)$ не содержат одновременно точек A и B.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $g \subset U$ такая компонента, тогда $\deg f/g = 0$. Покажем, что граница образа этой компоненты обязательно содержит одну из вершин A или B треугольника G.

В самом деле, возможны следующие случаи:

1) граница $\partial f(g)$ образа g содержит лишь точки боковых сторон: $\overline{AC} \cup \overline{BC}$;

2) граница $\partial f(g)$ содержит лишь точки стороны $\overline{AB}$;

3) граница $\partial f(g)$ содержит точки как из $(\overline{AC} \cup \overline{BC}) \setminus (A \cup B)$ так и из $\overline{AB} \setminus (A \cup B)$;

4) $\partial f(g)$ содержит среди граничных точек либо только A, либо только B.

Поскольку граница ∂g отображается в границу ∂G, то первые два случая невозможны в силу леммы 2.

Невозможен и случай 3). Это легко следует из того факта, что непрерывный образ границы жордановой (в силу леммы 3) области ∂g является связным.

Таким образом, имеет место только последний случай. Поэтому $f(g) \neq G$. Отсюда и из того, что граница ∂g отображается в границу ∂G, следует, что существует одномерный континуум граничных точек: $\partial f(g) \setminus \partial G$. Проведем прямую Λ, параллельную отрезку $\overline{AB}$, через такую точку $x \in \partial f(g) \setminus \partial G$, чтобы множество $f^{-1}(\Lambda) \cap g$ не содержало компонент, делящих g более чем на две области. Это можно осуществить, поскольку совокупность множеств уровней, содержащих компоненты, которые разделяют более чем на две области, может быть не более чем счетным множеством [10]. Покажем, что множество $f^{-1}(\Lambda)$ в компоненте g представляет собой систему невырожденных жордановых дуг $\{\lambda_i\}$ $(i=1,2,3,\ldots)$ с концами на границе ∂g.

Действительно, замкнутых кривых в $\bar{g}$, образы которых находятся на $\Lambda \cap \overline{f(g)}$, не существует в силу леммы 2.

Заметим также, что нет и одноточечных компонент множества $f^{-1}(\Lambda)$ в компоненте g. В самом деле, пусть это не так и найдется одноточечная компонента z_1. Предположим сначала, что z_1 – регулярная точка. Тогда выберем регулярную окрестность U_1 точки z_1 и рассмотрим множество $U_1 \cap f^{-1}(f(U_1) \cap \Lambda)$. Поскольку U_1 выбиралось как регулярная окрестность, то это множество представляет собой простую дугу, проходящую через точку z_1. Но это противоречит тому, что z_1 – одноточечная компонента множества $f^{-1}(\Lambda)$.

Пусть теперь $z_1 \in P$. Для простоты изложения дальнейшего доказательства леммы обозначим через H_1 и H_2 те подмножества образа $f(g)$, которые находятся соответственно слева и справа относительно прямой Λ. Ясно, что z_1 является внутренней граничной точкой некоторой компоненты g_1, либо множества $f^{-1}(H_1)$, либо множества $f^{-1}(H_2)$. Но тогда некоторые начальные криволинейные отрезки $l_1(z_1)$ и $l_2(z_1)$ простой дуги $l(z_1)$, расположенные в паре вертикальных углов $\omega_i(z_1)$ $(i=1,2)$, целиком лежат в g_1, и поэтому их образы $L_1(W_1)$ и $L_2(W_1)$ (здесь $W_1=f(z_1)$), являющиеся невырожденными континуумами (в силу нульмерности f) и находящиеся в соответствующих углах $\Omega_i(W_1)$ $(i=1,2)$, должны принадлежать $f(g_1)$. Но это противоречит тому, что угол $\Omega_1(W_1)$ или угол $\Omega_2(W_1)$ (в зависимости от того находится образ $f(g_1)$ справа или слева относительно прямой Λ) лежит полностью вне $\overline{f(g_1)}$ (исключая вершину W_1).

Итак, нам осталось показать, что множество $f^{-1}(\Lambda)\cap$

не имеет неразделяющих компонент и компонент, которые содержат неразделяющие подконтинуумы [10]. Действительно, пусть это не так и λ_1 – такая компонента либо неразделяющий подконтинуум какой-либо компоненты. Тогда ясно, что точки множества λ_1 являются внутренними граничными точками некоторой компоненты $\widehat{g}$ либо множества $f^{-1}(H_1)$, либо множества $f^{-1}(H_2)$. Далее, рассуждая так же как и в случае одноточечной компоненты $z_1 \in P$, мы получаем противоречие.

Таким образом, множество $f^{-1}(\Lambda) \cap g$ есть система невырожденных (жордановых в силу леммы 3) дуг $\{\lambda_i\}$ $(i=1,2,3,\ldots)$ с концами на границе ∂g. Ясно, что это справедливо для любой прямой Λ, параллельной отрезку $\overline{AB}$ и проходящей через такую точку $z \in \partial f(g) \setminus \partial G$, чтобы множество $f^{-1}(\Lambda) \cap g$ не содержало компонент, разделяющих g более чем на две области.

Теперь рассмотрим одну дугу λ множества $f^{-1}(\Lambda) \cap g$ такую, что $\lambda \cap P \neq \emptyset$. Так как отображение f является внутренним в $\lambda \setminus P$, а P – нульмерное множество, то, как известно, из [4] $f(\lambda \cap P) \supset f(\lambda \setminus P)$ и на компакте $\overline{f(\lambda)} \subset \Lambda$ существует множество E всюду второй категории (на $\overline{f(\lambda)}$), для каждой точки W которого найдется бесконечная последовательность $\{z_n\}$ точек $z_n \in \lambda \setminus P$ таких, что $f(z_n) = W$. Возьмем произвольную точку $W \in E \cap f(g)$ и выберем две регулярные точки из $\{z_n\}$. Обозначим их через η и y. Выделим окрестности $U_\eta \subset g$, $U_y \subset g$ для точек η и y соответственно такие, чтобы в них f было однолистным, и рассмотрим $f^{-1}(K)$, где $K \subset f(U_\eta) \cap f(U_y)$ –открытый хруг с центром в точке W. Множество $f^{-1}(K)$ в окрестностях U_η и U_y представляет собой открытые топологические круги – две жордановые области, которые обозначим соответственно через K_η и K_y, причем $\eta \in K_\eta$, $y \in K_y$. Проведем радиус R в круге $\overline{K}$ так, чтобы он был параллелен оси абсцисс W – плоскости и находился справа относительно прямой Λ. Второй конец радиуса R обозначим через $\widehat{W}$.

Рассмотрим множество $f^{-1}(R)$ в жордановых областях

K_η и K_y. Оно представляет собой две простые дуги $\overline{\eta z'}$ и $\overline{y\zeta'}$, где $\widetilde{w}=f(z')=f(\zeta')$. Поскольку $\widetilde{w}\in H_2$, то ясно, что z' и ζ' лежат в компонентах множества $f^{-1}(H_2)$. Точки z' и ζ' не могут находиться в разных областях, на которые разбивается компонента g простой дугой λ. Так как в противном случае λ была бы совместной границей двух компонент множества $f^{-1}(H_2)$, а это, как показано в лемме 3, невозможно.

Покажем, что точки z' и ζ' находятся в одной компоненте множества $f^{-1}(H_2)$. Если это было бы не так, то тогда z' и ζ' в области g отделялись бы некоторой компонентой λ_1 множества $f^{-1}(\Lambda)$, отличной от дуги λ, и, следовательно, $\lambda_1\cap(\lambda\cup\overline{\eta z'}\cup\overline{y\zeta'})\neq\phi$. Но это противоречило бы либо тому, что λ – простая дуга, либо тому, что отображение f однолистно на $\overline{\eta z'}$ и $\overline{y\zeta'}$, где $f(\overline{\eta z'})=f(\overline{y\zeta'})=R$.

В компоненте множества $f^{-1}(H_2)$, в которой лежат точки z' и ζ', соединим z' и ζ' непрерывной кривой Γ так, чтобы $\Gamma\cap f^{-1}(\Lambda)=\phi$. Отсюда ясно, что образ $f(\Gamma)$ находится справа относительно прямой Λ, причем $f(\Gamma)\cap\Lambda=\phi$. Теперь проведем прямую $\widehat{\Lambda}$, параллельную отрезку $\overline{AB}$, справа относительно прямой Λ так, чтобы $f^{-1}(\widehat{\Lambda})\cap g$ не содержало компонент, разделяющих g более чем на две области [10] и $f(\Gamma)\cap\widehat{\Lambda}=\phi$, $\widehat{\Lambda}\cap R\neq\phi$. Тогда легко видеть, что найдется компонента λ множества $f^{-1}(\widehat{\Lambda})$ – простая дуга в g, которая бы отделяла дугу λ от кривой Γ. Отсюда следует, что $\widehat{\lambda}\cap\overline{\eta z'}\neq\phi$ и $\widehat{\lambda}\cap\overline{y\zeta'}\neq\phi$. Так как f однолистно на $\overline{\eta z'}$ и $\overline{y\zeta'}$, где $f(\overline{\eta z'})=f(\overline{y\zeta'})=R$, то каждое из множеств $\widehat{\lambda}\cap\overline{\eta z'}$ и $\widehat{\lambda}\cap\overline{y\zeta'}$ представляет собой точку. Обозначим эти точки соответственно через z и ζ. Ясно также, что $f(z)=f(\zeta)=R\cap\widehat{\Lambda}=w'$.

Теперь рассмотрим открытый криволинейный прямоугольник, границей которого служат простые дуги $\overline{\eta z}$, $\overline{y\zeta}$, $\overline{\eta y}$, $\overline{z\zeta}$. Обозначим его через Π. Поскольку множество $f^{-1}(\Lambda)\cap g$ представляет собой систему невырожденных жордановых дуг с концами на границе ∂g

и отображение f однолистно на $\overline{\eta z}$ и $\overline{y\varsigma}$ (где $f(\overline{\eta z}) = f(\overline{y\varsigma}) = \overline{ww'}$), то $(\overline{\eta z}\setminus\eta)\cap f^{-1}(\Lambda)=\phi$, $(\overline{y\varsigma}\setminus y)\cap f^{-1}(\Lambda)=\phi$, и, следовательно, прямоугольник Π точек множества $f^{-1}(\Lambda)$ не содержит. По этим же соображениям Π не содержит и точек множества $f^{-1}(\bar\Lambda)$.

Далее проведем прямую Λ', параллельную отрезку $\overline{AB}$, так, чтобы Λ' находилась одновременно справа относительно Λ и слева относительно $\bar\Lambda$, причем, очевидно, $\Lambda'\cap\overline{ww'}\neq\phi$. Покажем, что прямоугольник $\overline{\Pi}$ содержит только одну простую дугу множества $f^{-1}(\Lambda')$, которая имеет своими концами точку из $\overline{\eta z}\setminus(\eta\cup z)$ и точку из $\overline{y\varsigma}\setminus(y\cup\varsigma)$. Обозначим ее через λ'_0. Ясно, что $\lambda'_0\subset\lambda'$, где λ' – компонента множества $f^{-1}(\Lambda')$.

Исходя из тех же соображений, что и для прямых Λ и $\bar\Lambda$, можно отметить для Λ' следующее. Множество $f^{-1}(\Lambda')\cap g$ не имеет одноточечных компонент, неразбивающих компонент и компонент, которые содержат неразбивающие подконтинуумы, а также замкнутых кривых, причем каждая его компонента состоит из жордановых (в силу леммы 3) дуг с концами на границе ∂g. Кроме того, так как f однолистно на $\overline{\eta z}$ и $\overline{y\varsigma}$ (где $f(\overline{\eta z})=f(\overline{y\varsigma})= \overline{ww'}$), то каждое из множеств $(\overline{\eta z}\setminus(\eta\cup z))\cap f^{-1}(\Lambda')$ и $(\overline{y\varsigma}\setminus(y\cup\varsigma))\cap f^{-1}(\Lambda')$ состоит только из одной точки. Обозначим эти точки соответственно через z_1 и z_2. Отсюда следует, что прямоугольник $\overline{\Pi}$ содержит только одну простую дугу $\lambda'_0\subset f^{-1}(\Lambda')$ с концами z_1 и z_2 соответственно.

Итак, криволинейный прямоугольник $\overline{\Pi}$ полностью покрывается такой системой непересекающихся простых дуг, что их образы представляют собой систему непересекающихся прямолинейных отрезков, которые, в свою очередь, полностью покрывают образ $f(\overline{\Pi})$; при этом из любых двух таких дуг та, которая находится левее (или правее), переходит (в силу того, что f однолистно на $\overline{\eta z}$ и $\overline{y\varsigma}$) в отрезок, лежащий левее (или правее) среди двух соответствующих отрезков. Обозначим эту систему дуг через $\{\lambda_x\}$, где $x\in\overline{y\varsigma}\equiv\mathcal{Y}$.

Необходимо заметить, что криволинейный прямоу –

гольник $\bar{\Pi}$, как видно из предыдущего, не содержит множества ветвления B_f. (Как известно, множеством ветвления B_f называется множество точек, в которых отображение f внутреннее, но не является локальным гомеоморфизмом).

Пусть, далее, $P_x = P \cap \lambda_x$, где $x \in \mathcal{Y}$. Поскольку множество $P \cap \bar{\Pi}$ замкнуто, то $\lim\limits_{x \to x_0} P_x \subset P_{x_0}$. Но в силу нульмерности P найдется точка $x_0 \in \mathcal{Y}$, для которой $P_{x_0} \setminus \lim\limits_{x \to x_0} P_x \neq \phi$. Поэтому существует подпоследовательность дуг $\{\lambda_{x_k}\} \xrightarrow[x_k \to x_0]{} \lambda_{x_0}$ такая, что можно выделить в свою очередь (в силу нульмерности P) последовательность интервалов $\{\gamma_k\} \xrightarrow[x_k \to x_0]{} \gamma_0$, где $\gamma_k \subset \lambda_{x_k}$ и $\gamma_k \cap$ $\cap P = \phi$, $\gamma_0 \subset \lambda_{x_0}$ и $\gamma_0 \cap P \neq \phi$.

Известно [4], что $f(\gamma_0 \setminus P) \subset f(\gamma_0 \cap P)$, и найдется такая точка $\hat{w} \in f(\gamma_0)$ множества второй категории (на $f(\gamma_0)$), что существует последовательность $\{\tilde{z}_n\}$ точек $\tilde{z}_n \in \gamma_0 \setminus P$ таких, что $f(\tilde{z}_n) = \hat{w}$. Возьмем две регулярные точки $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ из $\{\tilde{z}_n\}$ в γ_0 и выберем для них регулярные окрестности $U(\tilde{z}_1) \equiv \hat{U}_1$ и $U(\tilde{z}_2) \equiv$ $\equiv \hat{U}_2$ такие, что $\hat{U}_1 \cap \lambda_{x_0} \subset \gamma_0$ и $\hat{U}_2 \cap \lambda_{x_0} \subset \gamma_0$. Рассмотрим $f(\hat{U}_1) \cap f(\hat{U}_2) \supset K$ – открытый круг с центром в точке $\hat{w}$ и его прообраз $f^{-1}(K)$ в окрестностях $\hat{U}_1$ и $\hat{U}_2$, который будет состоять из жордановых регулярных областей $\hat{V}_1$ и $\hat{V}_2$ соответственно.

Найдется такой номер k_0, что $\gamma_{k_0} \in \{\gamma_k\}$ и $\gamma_{k_0} \cap$ $\cap \hat{V}_1 \neq \phi$, $\gamma_{k_0} \cap \hat{V}_2 \neq \phi$. Отсюда следует, что интервал γ_{k_0} имеет хотя бы две точки, отображающиеся в одну точку. Это противоречит тому, что γ_{k_0} – регулярный интервал (поскольку γ_{k_0} точек множества P не содержит и в $\bar{\Pi}$ нет точек ветвления).

Лемма тем самым доказана.

Теперь мы покажем, что степень отображения на всех компонентах $g \subset \mathcal{O} = f^{-1}(G)$ неотрицательная, что и будет искомым противоречием нашему предположению. Итак, справедлива лемма.

Лемма 10. Для произвольной компоненты $g \subset \mathcal{O} =$ $= f^{-1}(G)$ $\deg f|_g \geq 0$.

Доказательство. Докажем лемму от противного. Допустим, что $\deg f/q < 0$. Тогда в силу следствия из лемм 7, 8 имеем следующее. Множество $\partial q \cap f^{-1}(\overline{AB})$ состоит из одной компоненты $\overline{\alpha\beta}$, причем $\deg f/\overline{\alpha\beta} = -1$. Множество $P \cap \overline{\alpha\beta}$ – нульмерно. Поэтому $\overline{\alpha\beta} \setminus P \neq \emptyset$. Мы можем рассматривать $f/\overline{\alpha\beta}$ как отображение одномерного отрезка $[\alpha, \beta]$ в отрезок $[B, A]$, $A > B$. Известно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы непрерывное нульмерное отображение, заданное на отрезке, являлось строго монотонным, есть отсутствие локальных нестрогих минимумов (соответственно локальных нестрогих максимумов). Покажем, что отображение f на $\overline{\alpha\beta}$ является строго монотонным, а именно, монотонно убывающим (в нашем случае). Тем самым получим противоречие с тем, что на интервалах регулярности $\gamma_j \subset \overline{\alpha\beta}$ отображение f является строго возрастающим (поскольку $\deg f/\gamma_j = +1$).

Покажем, что отображение f на $\overline{\alpha\beta}$ не имеет локальных нестрогих минимумов. Докажем это тоже от противного. Предположим, что имеется, по крайней мере, один нестрогий минимум отображения f на $\overline{\alpha\beta}$. Обозначим его через c_{min}. Ясно, что $c_{min} \in P$. Напомним, что точка $c_{min} \in \overline{\alpha\beta}$ называется точкой нестрогого локального минимума отображения f, если существует такая окрестность $U(c_{min})$ точки c_{min}, что для всех точек $x \in U(c_{min})$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(c_{min})$.

Рассмотрим отрезок $\overline{\alpha c_{min}}$. Поскольку отображение f на отрезке $\overline{\alpha c_{min}}$ является непрерывным, то, как известно, f на $\overline{\alpha c_{min}}$ достигает своего наменьшего значения. Обозначим его через d_{min}. Так как в точки A и B отрезка $\overline{AB}$ отображаются соответственно точки α и β, причем (в силу лемм 7, 8) единственные из $\overline{\alpha\beta}$, $\deg f/\overline{\alpha\beta} = -1$ и c_{min} – нестрогий минимум, то ясно, что $d_{min} \in \overline{\alpha c_{min}} \setminus \alpha$ и точка d_{min} – точка нестрого минимума. Очевидно также, что $d_{min} \in P$ и, $f(d_{min}) = \mathcal{D} \notin A \cup B$.

Рассмотрим далее множество $f^{-1}(\overline{A\mathcal{D}})$ на дуге $\overline{\alpha\beta}$. Так как $f(\overline{\alpha\beta}) = \overline{AB}$, где $f(\alpha) = A$ и $f(\beta) = B$, то найдется, обязательно, компонента множества $f^{-1}(\overline{A\mathcal{D}})$

которая отображается на весь отрезок $\overline{A\mathcal{D}}$. Эта компонента должна содержать точку, отображающуюся в точку A. В силу лемм 7, 8 a – единственная на $\overline{ab}$ точка, отображающаяся в A. Поэтому точка a должна принадлежать компоненте множества $f^{-1}(\overline{A\mathcal{D}})$, которая отображается на весь отрезок $\overline{A\mathcal{D}}$. Обозначим эту компоненту через $\overline{ad}$. Очевидно, что $\overline{ad}$ – единственная компонента такая, что $f(\overline{ad})=\overline{A\mathcal{D}}$, $f(a)=A$, $f(d)=\mathcal{D}$. Ясно, что $\deg f/_{\overline{ad}} = -1$. Отсюда же следует, что нет компонент множества $f^{-1}(\overline{A\mathcal{D}})$, отображающихся на $\overline{A\mathcal{D}}$ со степенью + 1.

Покажем, что нет неодноточечных компонент множества $f^{-1}(\overline{A\mathcal{D}}) \cap \overline{ab}$, которые отображаются в $\overline{A\mathcal{D}}$ со степенью нуль. В самом деле, проведем через точку $\mathcal{D}$ прямую, параллельную стороне $\overline{BC}$ треугольника G, и выделим треугольник G', отсекаемый этой прямой и имеющий в качестве одной из вершин точку A. Рассмотрим множество $g \cap f^{-1}(G')$.

Поскольку $\deg f/g = -1$ и точки a, b, отображающиеся в точки A и B соответственно, единственные на границе ∂g (в силу лемм 7, 8 и их следствия) и так как граница ∂g отображается в границу ∂G, то множество $g \cap f^{-1}(G')$ состоит из одной компоненты, отображающейся на G' со степенью – 1, и таких компонент, отображающихся в G', границы образов которых не содержат точки A. Но согласно лемме 9 последнее множество компонент пусто. Поэтому $g \cap f^{-1}(G')$ состоит из одной компоненты, отображающейся на G' со степенью – 1. Итак, нет неодноточечных компонент множества $\overline{ab} \cap f^{-1}(\overline{A\mathcal{D}})$, отображающихся в $\overline{A\mathcal{D}}$ со степенью нуль.

Так как $f(d)=f(d_{min})=\mathcal{D}$, $d_{min} \in P$ и поскольку компонента $\overline{ad}$, отображающаяся со степенью – 1, по леммам 7, 8 не содержит никаких точек, кроме d, которые бы отображались в точку $\mathcal{D}$, то $d \equiv d_{min}$. Множество $f^{-1}(\overline{A\mathcal{D}}) \cap \overline{ab}$ не содержит неодноточечных компонент, отображающихся со степенью нуль, и компонент, отображающихся со степенью + 1. Это противоречит тому, что концевая точка d отрезка $\overline{ad}$ является точкой локального нестрогого минимума.

Таким образом, f на $\overline{ab}$ точек локального нестрогого минимума не имеет, а поэтому ограничение $f|_{\overline{ab}}$ строго убывающее отображение, так как $\deg f|_{\overline{ab}} = -1$.

Лемма 10 доказана, и тем самым завершено доказательство теоремы.

Литература

1. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964. – 228с
2. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. – М.: Физматгиз, 1973. – 575 с.
3. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. –212 с.
4. Трохимчук Ю. Ю. О непрерывных отображениях областей евклидова пространства. – Укр. мат. журн., 1964, 16; № 2, с. 196–211.
5. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. – М.: Гостехиздат, 1951.
6. Väisälä Z., Discrete open mappings on manifolds, An. Acad. Scient. Fennicae, Series A. I. Mathematica, 392, 1966.– 28p.
7. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 704 с.
8. Александров П. С. Комбинаторная топология. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947. –660 с.
9. Трохимчук Ю. Ю., Бондарь А. В. О локальной степени нульмерного отображения. – В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений, вып. 1 Киев: Наук. думка, 1969, с. 221 –241.
10. Кронрод А. С. О функциях двух переменных. – Успехи мат. наук. 1950, 5, вып. 1, с. 24–134.
11. Трохимчук Ю. Ю. Теорема о внутренних отображениях. – В кн.: Геометрическая теория функций и топология. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 72–85.
12. Куратовский К. Топология, т. II. –М.: Мир, 1969 – 624 с.
13. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. –М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 231 с.