

## НАБЛИЖЕННЯ ОБМЕЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАРШОГО ПОРЯДКУ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗАДАЧ КОШІ

*Доведено, що обмежений розв'язок деякого абстрактного диференціального рівняння старшого порядку можна на заданому відрізку наблизити розв'язками відповідних задач Коші.*

Romanenko V., Chaikovskiy A.

APPROXIMATION OF BOUNDED SOLUTION OF ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATION OF HIGHER ORDER BY SOLUTIONS OF CAUCHY PROBLEMS

*It is proved that bounded solution of the abstract differential equation of higher order could be approximated on the given segment by solutions of corresponding Cauchy problems.*

### 1. Вступ

В роботі досліджено питання апроксимації обмеженого на всій осі розв'язку лінійного диференціального рівняння довільного порядку в банаховому просторі вигляду

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^{(k)}(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

розв'язками задач Коші з нульовими початковими умовами на заданому відрізку. Точність наближення визначається властивостями операторних коефіцієнтів та початковими точками для задач Коші. Отримані результати узагальнюють твердження з роботи [1], отримане для рівняння першого порядку.

### 2. Основні результати

Нехай  $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$  – комплексний банахів простір,  $L(\mathbf{B})$  – множина лінійних неперервних операторів в  $\mathbf{B}$ ,  $\{A_k : 0 \leq k \leq n-1\} \subset L(\mathbf{B})$ , оператори  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  попарно комутують.

Позначимо також  $T := \{it : t \in \mathbf{R}\}$ .

**Лема 1.** Нехай виконуються умова:

$$\forall z \notin T \exists \left( z^n I - \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k \right)^{-1} \in L(\mathbf{B}).$$

Тоді для довільної обмеженої на осі неперервної функції  $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{B}$  існує єдиний обмежений разом з усіма похідними до  $m-1$  порядку розв'язок  $x \in C^m(\mathbf{R}, \mathbf{B})$  диференціального рівняння (1).

**Доведення.** Позначимо через  $\mathbf{B}^m$  декартів добуток  $m$  екземплярів простору  $\mathbf{B}$ ;  $\mathbf{B}^m$  – комплексний банахів простір з покомпонентним додаванням і множенням на скаляр та нормою

$$\|\bar{z}\|_m := \max_{1 \leq k \leq m} \|z_k\|, \quad \bar{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{B}^m.$$

З урахуванням правил матричного числення рівняння (1) можна переписати у вигляді рівняння в цьому просторі таким чином:

$$\bar{z}'(t) = H\bar{z}(t) + \bar{f}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

$$\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{m-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} O & I & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & O & I \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

причому на незаповнених місцях матриці  $H$  знаходяться нульові оператори. Матриця  $H$  визначає в просторі  $\mathbf{B}^m$  обмежений оператор, який теж позначатимемо буквою  $H$ .

Нехай  $z \in T$ . Тоді оператор  $H - zI$  має обернений, бо дискримінант відповідної матриці, рівний

$$A_0(-1)^{n-1} + A_1(-1)^{n-2}(-z) + A_2(-1)^{n-3}(-z)^2 + \dots + (A_{n-1} - zI)(-z)^{n-1} = (-1)^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k - z^n I \right),$$

має обернений оператор за умовою теореми. При цьому аналогічно до відомих формул лінійної алгебри (див. [2, с. 26]) обернений оператор може бути записаний у формі матриці з відповідних мінорів, домноженої на оператор,

обернений до дискримінанта. Тому оператор  $H$  з використанням теорії спектральних множин (див. [3]) може бути поданий у вигляді суми операторів  $H_+$  та  $H_-$ , спектри звужень яких на відповідні інваріантні підпростори  $\mathbf{B}_+^m, \mathbf{B}_-^m$  лежать у правій та лівій півплощині відповідно. Простір  $\mathbf{B}^m$  при цьому є прямою сумою підпросторів  $\mathbf{B}_+^m, \mathbf{B}_-^m$ , проектори на які позначимо  $P_+, P_-$ . Шуканий розв'язок буде сумою розв'язків рівнянь у відповідних підпросторах. Як відомо, обмежений на осі розв'язок існує, причому він може бути заданий формулою

$$\bar{z}(t) = - \int_t^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \bar{f}(s) ds + \int_{-\infty}^t e^{H_-(t-s)} P_- \bar{f}(s) ds, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Першою координатою цього розв'язку є шукана функція  $x$ :

$$x(t) = - \left( \int_t^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \bar{f}(s) ds \right)_1 + \left( \int_{-\infty}^t e^{H_-(t-s)} P_- \bar{f}(s) ds \right)_1, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Лему 1 доведено.

**Лема 2.** Нехай виконуються умови леми 1. Тоді для довільних  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ ,  $y_1 \in C((-\infty, t_2], \mathbf{B})$ ,  $y_2 \in C([t_1, +\infty), \mathbf{B})$ , кожна з задач Коші

$$u_1^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_1^{(k)}(t) + y_1(t), \quad t \geq t_1, \quad u_1(t_1) = u_1'(t_1) = \dots = u_1^{(n-1)}(t_1) = \bar{0}, \quad (4)$$

$$u_2^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_2^{(k)}(t) + y_2(t), \quad t \leq t_2, \quad u_2(t_2) = u_2'(t_2) = \dots = u_2^{(n-1)}(t_2) = \bar{0}, \quad (5)$$

має єдиний  $m$  разів неперервно диференційовний розв'язок.

*Доведення* аналогічне доведенню леми 1. При цьому розв'язки задач Коші існують і можуть бути записані у вигляді

$$u_1(t) = \left( \int_{t_1}^t e^{H(t-s)} \bar{f}_1(s) ds \right)_1, \quad t \geq t_1; \quad u_2(t) = \left( \int_t^{t_2} e^{H(t-s)} \bar{f}_2(s) ds \right)_1, \quad t \leq t_2. \quad (6)$$

**Теорема 1.** Нехай виконуються умова:

$$\forall z \notin T \quad \exists \left( z^n I - \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k \right)^{-1} \in L(\mathbf{B}).$$

Нехай  $y \in C(\mathbf{R}, \mathbf{B})$  – обмежена на осі функція,  $x \in C^m(\mathbf{R}, \mathbf{B})$  – відповідний їй обмежений розв'язок рівняння (1), що існує за лемою 1,  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ ,  $t_1 < t_2$ ,  $u_1, u_2$  – розв'язки задач Коші (4) та (5), що існують за лемою 2 для функцій  $y_1 := P_- y$ ,  $y_2 := P_+ y$ . Покладемо

$$u(t) := u_1(t) + u_2(t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Тоді існують сталі  $C > 0$ ,  $h > 0$ , залежні лише від операторних коефіцієнтів і незалежні від функції  $y$ , такі, що виконується оцінка

$$\forall t \in [t_1, t_2] : \|x(t) - u(t)\| \leq C \left( e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)} \right) \|y\|_\infty. \quad (7)$$

*Доведення.* Враховуючи розташування спектру операторів  $H_-, H_+$ , отримаємо оцінки

$$\exists L > 0 \quad \exists h > 0 \quad \forall t \in \mathbf{R} : \|e^{-H_+ t}\| \leq L e^{-ht}, \quad \|e^{H_- t}\| \leq L e^{-ht}.$$

Використовуючи зображення (3) і (6), отримаємо

$$\begin{aligned} \|x(t) - u(t)\| &= \left\| - \left( \int_t^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \bar{f}(s) ds \right)_1 + \left( \int_{-\infty}^t e^{H_-(t-s)} P_- \bar{f}(s) ds \right)_1 + \left( \int_{t_1}^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \bar{f}(s) ds \right)_1 - \left( \int_{-\infty}^{t_2} e^{H_-(t-s)} P_- \bar{f}(s) ds \right)_1 \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_{-\infty}^{t_1} e^{H_-(t-s)} \bar{f}(s) ds \right\| + \left\| \int_{t_2}^{+\infty} e^{H_+(t-s)} \bar{f}(s) ds \right\| \leq \frac{L}{h} \left( e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)} \right) \|\bar{f}\|_\infty = \frac{L}{h} \left( e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)} \right) \|y\|_\infty, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

**Зауваження 1.** Теорема показує, що для довільного відрізка  $[a, b]$  та значення  $\varepsilon > 0$  можна обрати відрізок  $[t_1, t_2] \supset [a, b]$  з настільки великими значеннями  $t_2 - b, a - t_1$ , що на цьому відрізку обмежений на осі розв'язок та сума розв'язків відповідних задач Коші будуть відрізнятися за нормою не більше, ніж на  $\varepsilon$ .

2. У випадку, коли один з операторних коефіцієнтів  $A_k$ ,  $k \neq 0$ , є необмеженим, то побудований в доведенні леми 1 оператор  $H$  не має оберненого при  $z = 0$ , що легко перевірити безпосередньо. В тому разі, коли необмеженим є оператор  $A_0$ , то матричний оператор  $(H - zI)^{-1}$  міститиме компоненти вигляду  $A_0 (A_0 - C(z))^{-1}$ , де  $C(z) \in L(\mathbf{B})$ . Норми таких компонент можуть не спадати при  $z \rightarrow \infty$  за межами деякого сектора, отже оператор  $H$  не буде секторіальним (див. [4]) і до нього не можна застосувати результат статті [1].

**Приклад.** Розглянемо рівняння

$$x^{(n)}(t) = A_0 x(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Для нього умова теореми 1 набуває вигляду  $\forall z \notin T \exists (z^n I - A_0)^{-1} \in L(\mathbf{B})$ , тобто при непарних  $n$ :  $\sigma(A_0) \cap T = \emptyset$ , при  $n = 4k, k \in \mathbf{N}$  –  $\sigma(A_0) \cap [0, +\infty) = \emptyset$ , при  $n = 4k - 2, k \in \mathbf{N}$  –  $\sigma(A_0) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ .

### 3. Висновки

В роботі наведені узагальнення відомих умов апроксимації обмеженого на осі розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку в абстрактному просторі розв'язками відповідних задач Коші на випадок рівнянь старших порядків.

1. Городній М.Ф., Романенко В.М. Апроксимація обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв'язками відповідних крайових задач // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, №4. – С. 548-552. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1966. 3. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М., 1976. 4. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985.

Надійшла до редакції 9.11.11