

УДК 62-50

К АНАЛИЗУ ОДНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ

М.А.Адамовская, В.А.Вородин, В.А.Дубовик, И.П.Побыванен

Влияние различных факторов на работу предприятия часто моделируются с помощью микроэкономических производственных функций [1], [2].

Исследуется модель предприятия, деятельность которого описывается производственной функцией типа Кобба - Дугласа [3], [4] с ограниченными ресурсами.

Устанавливаются условия, позволяющие предприятию организовать свою работу с максимальной прибылью.

Перейдем к описанию модели и формулировке задачи. Предположим, что зависимость между выпуском продукции f и количеством занятых в производстве ресурсов x_i определяется скалярной функцией типа Кобба - Дугласа.

$$f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор ресурсов; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - положительный вектор параметров производственной функции, полученный при анализе статистической информации.

Если цена продукции фиксирована и равна p , а цены ресурсов задаются вектором $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, то стоимость произведенной продукции равна $pf(x)$, а издержки производства

$$qx = \sum_{i=1}^n q_i x_i.$$

Прибыль $F(x)$ - разность между стоимостью произведенной продукции $pf(x)$ и издержками производства qx . Предполагается, что

предприятие может использовать ресурсы в количестве, не превышающем выделенные лимиты, т.е. $0 \leq x_i \leq a_i$.

Требуется спланировать работу предприятия так, чтобы максимизировать прибыль.

Получаем следующую задачу: в заданном n -мерном параллелепипеде

$$0 \leq x_i \leq a_i < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad /1/$$

найти такие значения переменных x_i , при которых функция

$$F(x) = p \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^n q_i x_i, \quad /2/$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -мерный переменный вектор с действительными координатами; p, q_i, α_i — заданные положительные параметры, принимает максимальное значение.

Для решения задачи введем следующие обозначения и определения. Обозначим n -мерный вектор, координаты которого равны 0 или 1,

$\mathcal{I}$, а множество всех таких векторов — R_0^n . Очевидно, множество R_0^n содержит 2^n элементов. Если

$$\mathcal{I} = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in R_0^n,$$

то определим вектор $\mathcal{I}'$ равенством

$$\mathcal{I}' = (1-i_1, 1-i_2, \dots, 1-i_n).$$

Из определения следует, что $\mathcal{I}' \in R_0^n$ и $\mathcal{I}'' = \mathcal{I}$. Обозначим векторы $(1, 1, \dots, 1) \in R_0^n$ и $(0, 0, \dots, 0) \in R_0^n$ соответственно E и E^0 ; ясно, что $E' = E^0$. Пусть $1 \leq k \leq n$, k — целое; считаем $k \in \mathcal{I}$, если k -я координата вектора $\mathcal{I}$ равна 1.

Если заданы векторы a и $\mathcal{I}$,

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad 0 \leq a_i < \infty; \quad \mathcal{I} = (i_1, i_2, \dots, i_n),$$

то определим

$$\prod_{j \in \mathcal{I}} a_j = \prod_{j \in \mathcal{I}} a_j^{i_j}$$

/условимся, что $0^0 = 1$, как произведение тех координат вектора α , чьи номера в разложении вектора $\mathcal{J}$ равны 1.

Аналогично определим

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j = \sum_{j \in \mathcal{J}} \varepsilon_j \alpha_j.$$

Найдем критические точки функции $F(x)$. Приравняв к нулю ее частные производные, получим систему уравнений

$$\rho \frac{\alpha_i}{x_i} \prod_{i \in E} x_i^{\alpha_i} - q_i = 0,$$

из которой определим критическую точку x^{E_0} с координатами

$$x_k^{E_0} = \frac{\alpha_k}{q_k} \left(\rho \prod_{i \in E} \left(\frac{\alpha_i}{q_i} \right)^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad k \in E, \quad /3/$$

где

$$\gamma = 1 - \sum_{i \in E} \alpha_i \neq 0.$$

Значение функции /2/ в точке /3/ равно

$$F(x^{E_0}) = \gamma \left(\rho \prod_{i \in E} \left(\frac{\alpha_i}{q_i} \right)^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad /4/$$

Наибольшее значение функции /2/, определенной в параллелепипеде /1/, находится среди критических точек функции внутри параллелепипеда или среди критических точек на его гранях. Из /2/ и /4/ следует, что функция не может принимать наибольшие значения в тех точках множества /1/, где хотя бы одно значение $x_i = 0$. Поэтому будем искать критические точки на множествах $\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$, определяемых векторами $\mathcal{J} \in R_0^n$ по следующему правилу:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \alpha_i, & i \in \mathcal{J}; \\ 0 \leq x_i \leq \alpha_i, & i \in \mathcal{J}' \end{aligned} \right\} \quad /5/$$

Из /5/ следует, что вектор E_0 определяет параллелепипед /1/

$$\mathcal{U}_{E_0} = \{0 \leq x_i \leq a_i, i \in E\}.$$

Сужение функции /2/ на грань $\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ приводит к исследованию на максимум функции

$$F^{\mathcal{J}}(x) = p \prod_{i \in \mathcal{J}} a_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{i \in \mathcal{J}'} x_i^{\alpha_i} - \sum_{i \in \mathcal{J}'} q_i x_i - \sum_{i \in \mathcal{J}} q_i a_i. \quad /6/$$

Из /2/ и /3/ следует, что функция /6/ имеет критическую точку $x^{\mathcal{J}}$ с координатами

$$x_k^{\mathcal{J}} = \begin{cases} a_k, & k \in \mathcal{J}; \\ \frac{\alpha_k}{q_k} \left(p \prod_{i \in \mathcal{J}} a_i^{\alpha_i} \prod_{i \in \mathcal{J}'} \left(\frac{\alpha_i}{q_i} \right)^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{f(\mathcal{J}')}}, & k \in \mathcal{J}', \end{cases} \quad /7/$$

где $f(\mathcal{J}') = 1 - \sum_{i \in \mathcal{J}'} \alpha_i$.

Значение функции /6/ в точке /7/ $F^{\mathcal{J}}(x^{\mathcal{J}}) = f(\mathcal{J}') \times$

$$\times \left(p \prod_{i \in \mathcal{J}} a_i^{\alpha_i} \prod_{i \in \mathcal{J}'} \left(\frac{\alpha_i}{q_i} \right)^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{f(\mathcal{J}')}} - \sum_{i \in \mathcal{J}} q_i a_i. \quad /8/$$

Отметим, что /3/ и /4/ следует из /7/ и /8/ при $\mathcal{J} = E_0$.

Поскольку непрерывная на замкнутом множестве функция достигает на этом множестве своего наибольшего значения, то получаем следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\sum_{i \in \mathcal{J}} \alpha_i \neq 1$ для всех векторов $\mathcal{J} \in R_0^n$. Тогда

$$\max_{x \in \mathcal{U}_{E_0}} F(x) = \max_{\mathcal{J} \in R_0^n(a)} F^{\mathcal{J}}(x), \quad /9/$$

где $R_0^n(a) = \{\mathcal{J} \in R_0^n: x_k^{\mathcal{J}} \leq a_k, k \in E\}$.

При этой точке наибольшего значения функции $F(x)$, $x \in \mathcal{U}_{E_0}$, будет то значение $x^{\mathcal{J}_0}$, для которого

$$F^{\mathcal{J}_0}(x^{\mathcal{J}_0}) = \max_{\mathcal{J} \in R_0^n(a)} F^{\mathcal{J}}(x).$$

Эта теорема сводит нахождение наибольшего значения функции на

континуальном множестве к исследованию функции на конечном множестве $R_o^n(a)$, содержащем не более 2^n точек. Поскольку мощность множества $R_o^n(a)$ с ростом n растет со скоростью геометрической прогрессии, то для анализа равенства /9/ целесообразно использовать ЭВМ.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Г а р а е в Я.Г. Построение производственных функций сельскохозяйственных культур.- Изв. АН Азерб. ССР, 1977, № 3, с. 62-67.
2. П е т р о в А.А., П о с п е л о в И.Г. Системный анализ развивающейся экономики. Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1979, № 2, с. 18-27.
3. В е е r G e r a l d, The Cobb - Douglas production Function.- Math. Mag., 1980, 53, N 1, p. 44-48.
4. C h e n g J u l i M i n g, Technical change in the production function with many factors of production.- Riv. int. sci. econ. a commerce, 1979. 26, N 9, p. 840-848.