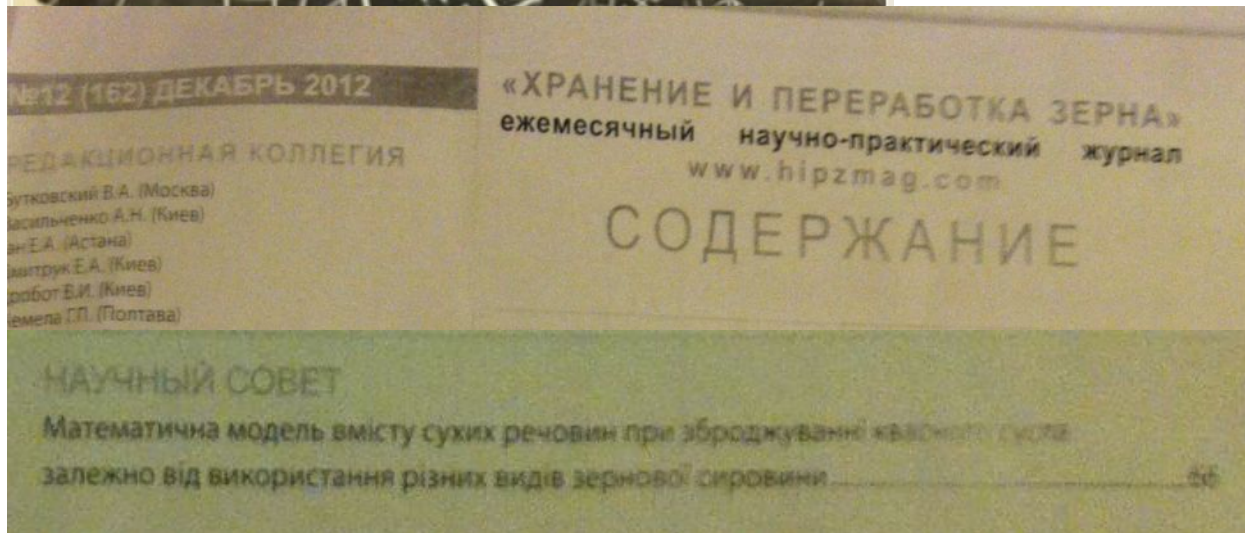




Математична модель вмісту сухих речовин при зброджуванні квасного суслу залежно від використання різних видів зернової сировини

Бойко М.І., аспірант., Прибильський В.Л., професор, доктор технічних наук, Бондар М.В., кандидат технічних наук, Седих О.Л., старший викладач, Маковецька С.В., асистент, Національний університет харчових технологій

Хлібний квас – це напій темно-коричневого кольору з приємним кисло-солодким смаком та характерним ароматом житнього хліба. Масова частка спирту напою складає не більше ніж 1,2% [1,2]. Його одержують шляхом комбінованого незакінченого спиртового і молочнокислого бродіння. Як основну сировину використовують концентрат квасного суслу, що виробляється спеціалізованими заводами та цехами в Україні, Росії та інших державах [1].

Для дослідження динаміки зброджування готували зразки суслу з чотирьох (ККС) та двох екстрактів. В готове сусло вносили закваску (дріжджі *S. cerevisiae* раси Р-87 та молочнокислі бактерії) з розрахунку 4% від об'єму та зброджували при температурі 30°C. Завершення бродіння визначали за зменшенням масової частки сухих речовин на 1,0%.

Для зручності сусло з ККС Бершадського спиртзаводу позначили **зразок 1**, сусло із зернового екстракту тритікале (40%) – **зразок 2**, сусло з ККС науково-виробничої компанії «Укрпектин» – **зразок 3**, сусло з житнього темного солодового екстракту «Laihian Mallas OY» – **зразок 4**, сусло із зернового екстракту тритікале (30%) – **зразок 5** та сусло з ячмінного світлого солодового екстракту «Laihian Mallas OY» – **зразок 6**.

Дослідним шляхом в результаті зброджування шести зразків квасного суслу дріжджами *Saccharomyces cerevisiae* раси Р-87 отримано значення сухих речовин (СР) у для заданих значень тривалості зброджування (τ) та подано у вигляді табл.1.

Таблиця 1. Значення сухих речовин (СР) у для заданих значень тривалості зброджування (τ) х квасного суслу

Тривалість (τ) зброджування, год.	Вміст сухих речовин (СР) у квасному суслі, %					
	Зразок 1	Зразок 2	Зразок 3	Зразок 4	Зразок 5	Зразок 6
0	3,40	3,40	3,40	3,40	3,40	3,40
3	3,39	3,37	3,31	3,40	3,40	3,29
5	3,38	3,31	3,25	3,38	3,37	3,24
7	3,34	3,23	3,18	3,37	3,34	3,19
9	3,28	3,16	3,08	3,35	3,30	3,11
11	3,18	3,09	2,99	3,32	3,26	3,02
13	3,06	3,01	2,87	3,29	3,21	2,91
15	2,96	2,93	2,76	3,25	3,14	2,79
17	2,85	2,82	2,64	3,18	3,06	2,68
19	2,71	2,68	2,48	3,09	2,98	2,52
21	2,61	2,56	2,41	3,00	2,91	2,43
23	2,52	2,41	—	2,90	2,84	—
25	2,42	—	—	2,83	2,78	—
27	—	—	—	2,76	2,70	—
29	—	—	—	2,67	2,61	—
31	—	—	—	2,56	2,49	—
32	—	—	—	2,50	2,43	—
33	—	—	—	2,41	—	—

На підставі отриманих даних для кожного зразка розв'язували наступні завдання:

1. Будування графіка залежності між табличними величинами у та х та візуальне визначення яка із відомих нам функцій найкраще відповідає побудованому графіку. Тобто визначаємо емпіричну формулу.
2. Визначення найкращих параметрів вибраної нами емпіричної формули методом найменших квадратів. В результаті цього було отримано математичну модель (апроксимуюча функція).

Суть методу найменших квадратів полягає у визначенні значень параметрів $a_1, a_2, \dots, a_m$ таким чином, щоб сума квадратів відхилень табличної та емпіричної функцій була мінімальною.

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m))^2 \rightarrow \min$$

Відповідно теорії необхідною умовою мінімуму функції є рівність нулю частинних похідних функції

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо значення параметрів $a_1, a_2, \dots, a_m$, які задовольняють умові методу найменших квадратів.

Визначення параметрів лінійної емпіричної залежності. Нехай між вихідними експериментальними даними (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$ існує лінійна залежність $y = ax + b$. Функція суми квадратів відхилень має вигляд:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

Система рівнянь для визначення параметрів a, b буде мати вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n a x_i^2 + \sum_{i=1}^n b x_i = 0 \\ -\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n a x_i + \sum_{i=1}^n b = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n b x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Звідси можна вивести, що

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Оцінку похибки апроксимуючої функції здійснюється за допомогою середньоквадратичного відхилення:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2}{n-1}}$$

де Y_i – розрахункові значення за емпіричною формулою;

y_i – таблично задані значення функції;

n – кількість точок.

На жаль, лінійна модель не завжди на практиці підходить до розподілу, що розглядається. Найчастіше зустрічаються емпіричні залежності такі як степенева; показникова; експоненціальна, тощо.

Ці види нелінійних емпіричних залежностей, зводяться до лінійних. При цьому використовують так званий метод „вирівнювання”. Наприклад, нехай за емпіричну функцію була вибрана функція $y = bx^a$. Ця функція нелінійна. Приведення до лінійної функції здійснюється у два етапи. На першому етапі проводиться логарифмування лівої та правої частин функції. В результаті отримуємо $\ln y = \ln(bx^a) \rightarrow \ln y = \ln(b) + a \ln(x)$. При заміні $Y = \ln y$; $B = \ln b$, $X = \ln x$ отримуємо лінійну функцію $Y = B + aX$.

Дуже зручним при виборі емпіричних залежностей можуть бути приведені в табл. 2 функції та їх лінійні аналоги.

Таблиця 2. Функції та їх лінійні аналоги

Вигляд емпіричної функції	Лінійний аналог	Значення параметрів
$y = b \cdot x^a$	$Y = B + aX$	$Y = \ln y$; $B = \ln b$; $X = \ln x$
$y = b \cdot a^x$	$Y = B + Ax$	$Y = \ln y$; $A = \ln a$; $B = \ln b$
$y = b \cdot e^{ax}$	$Y = B + ax$	$Y = \ln y$; $B = \ln b$
$y = a \ln x + b$	$y = aX + b$	$X = \ln x$

В тому випадку, коли емпірична функція має вигляд параболи $y = ax^2 + bx + c$, функція суми квадратів відхилень має вигляд:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

Умови мінімуму квадратичного критерію мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0 \end{cases}$$

Після перетворень система рівнянь набуде вигляд:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Отримати розв'язок системи рівнянь з трьома невідомими a, b, c можна використавши функцію `lsolve` в MathCAD.

Для зразків 1-6 вибирали три емпіричні формули:

1. Лінійну $y = ax + b$; 2. Експоненціальну $y = b \cdot e^{ax}$; 3. Квадратичну $y = ax^2 + bx + c$ та визначили, яка із цих формул найкраще описує отримані дослідні дані за оцінкою середньоквадратичного відхилення:

Зразок 1

Порівнявши середньоквадратичні відхилення для кожної емпіричної формули: лінійної $y = ax + b$ – $\varepsilon_{11} = 0.076728$, експоненціальної $y = b \cdot e^{ax}$ – $\varepsilon_{12} = 0.093974$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$ – $\varepsilon_{13} = 0.036322$ можна зробити висновок, що оскільки квадратична функція має найменше значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon_{13} = 0.036322$, саме вона буде вибрана в якості математичної моделі для зразка 1. Отже математична модель для зразка 1 має вигляд: $y_1 = -0.001221x^2 - 0.013x + 3.446$.

Зразок 2

Лінійна $y = ax + b$ – $\varepsilon_{21} = 0.061097$, експоненціальна $y = b \cdot e^{ax}$ – $\varepsilon_{22} = 0.076842$, квадратична $y = ax^2 + bx + c$ – $\varepsilon_{23} = 0.012424$, оскільки квадратична функція має найменше значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon_{23} = 0.012424$, тому саме вона буде вибрана в якості математичної моделі для зразка 2. Отже математична модель для зразка 2 має вигляд: $y_2 = -0.001255x^2 - 0.014x + 3.405$.

Зразок 3

Лінійна $y = ax + b$ – $\varepsilon_{31} = 0.045148$, експоненціальна $y = b \cdot e^{ax}$ – $\varepsilon_{32} = 0.062029$, квадратична $y = ax^2 + bx + c$ – $\varepsilon_{33} = 0.0166422$, оскільки квадратична функція має найменше значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon_{33} = 0.0166422$, тому саме вона буде вибрана в якості математичної моделі для зразка 3. Отже математична модель для зразка 3 має вигляд:

$$y_3 = -0.001034x^2 - 0.027x + 3.407$$

Зразок 4

Порівнявши середньоквадратичні відхилення для кожної емпіричної формули:

1. Лінійна $y = ax + b$ – $\varepsilon_{41} = 0.092411$

2. Експоненціальна $y = b \cdot e^{ax}$ – $\varepsilon_{42} = 0.107391$

3. Квадратична $y = ax^2 + bx + c$ – $\varepsilon_{43} = 0.0187144$

можна зробити висновок, що оскільки квадратична функція має найменше значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon_{43} = 0.0187144$, тому саме вона буде вибрана в якості математичної моделі для зразка 4. Отже математична модель для зразка 4 має вигляд: $y_4 = -0.0009841x^2 - 0.002575x + 3.403$.

Зразок 5

Лінійна $y = ax + b$ – $\varepsilon_{51} = 0.062647$, експоненціальна $y = b \cdot e^{ax}$ – $\varepsilon_{52} = 0.078021$, квадратична $y = ax^2 + bx + c$ – $\varepsilon_{53} = 0.0162538$, оскільки квадратична функція має найменше значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon_{53} = 0.0162538$, тому саме вона буде вибрана в якості математичної моделі для зразка 5. Отже математична модель для зразка 5 має вигляд: $y_5 = -0.0006828x^2 - 0.009043x + 3.426$.

Зразок 6

Лінійна $y = ax + b$ – $\varepsilon_{61} = 0.051422$, експоненціальна $y = b \cdot e^{ax}$ – $\varepsilon_{62} = 0.066852$, квадратична $y = ax^2 + bx + c$ – $\varepsilon_{63} = 0.0157643$, оскільки квадратична функція має

найменше значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon_{63} = 0.0157643$, тому саме вона буде вибрана в якості математичної моделі для зразка 6. Отже математична модель для зразка 6 має вигляд: $y_6 = -0.001206x^2 - 0.021x + 3.387$.

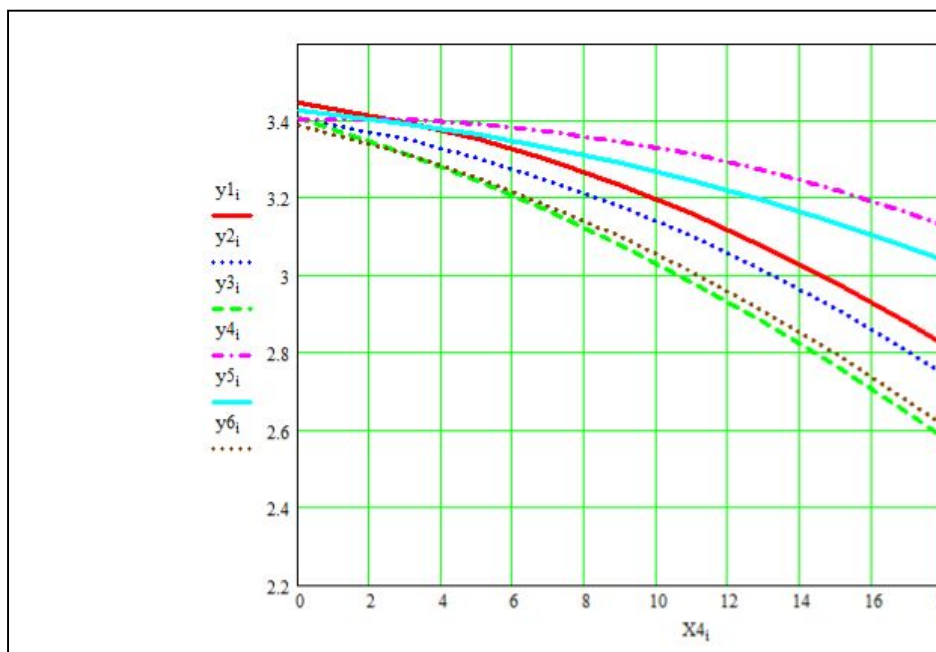


Рис. 1. Апроксимуючі функції зразків (1-6) вмісту СР у квасному суслі, %

Середня відносна похибка математичної моделі визначається між значеннями вихідної функції, знайденої за рівнянням (математичною моделлю) та експериментальними значеннями за формулою:

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{|Y - y|}{Y}}{n} \cdot 100$$

Середня відносна похибка математичної моделі для зразку 1: $\Delta = 1.064\%$, для зразку 2: $\Delta = 0.339\%$, для зразку 3: $\Delta = 0.428\%$, для зразку 4: $\Delta = 0.487\%$, для зразку 5: $\Delta = 0.457\%$, для зразку 6: $\Delta = 0.444\%$

Отже, отримано математичні моделі, які мають допустимі середні відносні похибки і показують залежність зменшення вмісту сухих речовин (СР) квасного сусла від тривалості процесу бродіння.

ЛІТЕРАТУРА

1. Домарецький В.А. Технологія екстрактів, концентратів і напоїв із рослинної сировини: підручник / В.А. Домарецький, В.Л. Прибильський, М.Г. Михайлов // Під ред. В.А. Домарецького. – Вінниця: Нова Книга, 2005. – 408 с.
2. Напої безалкогольні. Загальні технічні умови: ДСТУ 4069-2002. – [Чинний від 2002-10-01]. – К.: Держстандарт України, 2002. – 12 с. – (Національний стандарт України).
3. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента химической технологии: Учеб. пособие для хим. – технол. спец. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 327 с.
4. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учеб. пособие для вузов – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1988. – 239 с.
5. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в MathCAD 12. – СПб.: Питер, 2006

Автори

Сєдих Ольга Леонідівна, Сєдых О.Л., Olga Seidykh
Маковецька Світлана Василівна, Маковецкая С.В., Svetlana Makovetska
Бойко Марина Іванівна, Бойко М.И., Marina Boyko
Прибильський В.Л., Прибильский В.Л., V.Prybylskyu
Бондар М.В., Бондар М.В., M. Bondar

Назва документу

Математична модель вмісту сухих речовин при зброджуванні квасного сусла залежно від використання різних видів зернової сировини

Математическая модель содержания сухих веществ при сбраживании квасного сусла в зависимости от использования различных видов зернового сырья

Mathematical model of dry matter content in the fermentation kvass wort depending on the use of various kinds of grain materials

Ключові слова

Ключові слова: дослідні дані, квасне сусло, метод найменших квадратів, математична модель.

Ключевые слова: опытные данные, квасное сусло, метод наименьших квадратов, математическая модель.

Keywords: experimental data, kvass wort, the method of least squares, the mathematical model.

Анотація

Дана стаття присвячена побудові математичної моделі вмісту сухих речовин при зброджуванні квасного сусла залежно від використання різних видів зернової сировини. При обробці експериментальних даних були вибрані три математичні моделі (лінійна, експоненціальна та квадратична), знайдені параметри кожної моделі, після оцінки середніх відносних похибок була отримана математична модель для кожного зразка.

Данная статья посвящена построению математической модели содержания сухих веществ при сбраживании квасного сусла в зависимости от использования различных видов зернового сырья. При обработке экспериментальных данных были выбраны три математические модели (линейная, экспоненциальная и квадратичная), найденные параметры каждой модели, после оценки средних относительных погрешностей была получена математическая модель для каждого образца.

This paper focuses on the construction of a mathematical model of dry matter content in the fermentation kvass wort depending on the use of various kinds of grain materials. In processing the experimental data were sampled three mathematical models (linear, exponential and quadratic) found parameters of each model, after evaluating the average relative error was obtained mathematical model for each sample.

Дата публікації документа та джерело

Журнал «Хранение и переработка зерна» ежемесячный научно-практический журнал, №12 (162) декабрь 2012 Днепропетровск
(стор. 66-68)