

УДК 539.3.

Михайло А. Мартиненко, д.ф.-м.н., проф.

Аналітичний аналіз напружено-деформівного стану в тілі з циліндричною тріщиною

В роботі знайдені аналітичні формули для полів напружень і переміщень в довільній точці пружного середовища з циліндричною тріщиною. Отримані вирази для знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень, а також проаналізовано локальне поле напружень і переміщень в околі тріщини.

Ключові слова: коефіцієнти інтенсивності напружень, локальне фізичне поле

¹ Національний Університет Харчових Технологій, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 68
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

Дослідження полів переміщень і напружень в тілі з циліндричною тріщиною є ключовою задачею при оцінці міцності і надійності конструкцій ослаблених такими дефектами методами механіки руйнування. Ця задача потребує значно більше аналітичних досліджень, ніж зведення проблеми до системи інтегральних рівнянь Фредгольма.

На підставі рівностей (4), (12) [1] вирази для проекцій вектори зусиль $\vec{F}_n$ на поверхні циліндра поза розрізом запишемо у вигляді

$$R_p = \int_0^\infty [a_{11}(\lambda)S_1 + a_{12}(\lambda)S_2] \lambda \cos \lambda \xi d\lambda; \quad (\xi > 1)$$

$$Z_p = \int_0^\infty [a_{21}(\lambda)S_1 + a_{22}(\lambda)S_2] \lambda \sin \lambda \xi d\lambda \quad (1)$$

де $a_{ij}(\lambda)$ - знаходяться з формул (14). [1]

Безпосередній розрахунок зусиль на поверхні циліндра поза розрізом неможливий, так як асимптотичний аналіз невластних інтегралів (1) показує, що в точці $\xi=1$ зусилля мають корневу особливість. Якщо скористатися інтегральним

представленням $\sin \tau z = \tau \int_0^z \frac{x J_0(\tau x) dx}{\sqrt{z^2 - x^2}} [1]$

Martynenko M.A.¹, Dr. Sci. (Phys. – Math), prof.

Analytical analysis of the stress-strain state of a cylindrical body with a crack

The paper found analytical formulas for the fields of stresses and displacements at an arbitrary point of an elastic medium with a cylindrical crack. The expressions for finding the stress intensity factors and analyzes the local field stresses and displacements in the vicinity of the crack.

Key words: intensity factors and stresses, local physical field.

¹ National University of Food Technologies, 68, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601

e-mail: matemat@nuft.edu.ua

тригонометричних функцій і поміняти порядки інтегрування, то то прийдемо до інтегральних рівнянь Абеля такого вигляду

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \left\{ \int_0^1 \varphi(t) \left[\int_0^\infty L_{ij} J_0(\tau t) J_0(\tau x) dx \right] dt \right\} = F(\xi)$$

Так як точка $\xi=1$ є особливою точкою, то зовнішній інтеграл будемо знаходити з граничної рівності

$$\int_0^\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\xi \right\}$$

Після низки перетворень отримано такі вирази для зусиль на поверхні циліндра поза розрізом $(\xi > 1)$

$$R_p = -\frac{1}{2} \frac{\xi \varphi(1)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{\xi [\Phi_1(x) x^{-1}] dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} + \int_1^\xi \frac{\xi dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \frac{d}{dx} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 [\varphi(t) K_{11}(t, x) + \psi(t) K_{12}(t, x)] x^{-1} dx \right\} + C,$$

$$Z_p = \frac{1}{2} \frac{\psi(1)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{\Phi_2'(x) dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} + \int_1^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 [\varphi(t) K_{21}(t, x) + \psi(t) K_{22}(t, x)] dt \right\} \quad (2)$$

$$\int_0^\infty e^{-\tau(s-s_0+i\zeta)} J_0(\tau) \tau^{-1} d\tau \approx -\sqrt{2r} e^{i\gamma/2} \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau(s-s_0+i\xi)} J_1(\tau) d\tau \approx -(2r)^{-0.5} e^{-iy/2}$$

На їх підставі проводиться асимптотичне інтегрування виразів

$$\int_0^{\infty} \overline{\beta_{ij}} S_{1,2} \sin \lambda \xi d\lambda$$

Після низки громіздких перетворень локальне поле переміщень записується у вигляді

$$\begin{aligned} 2Gu_p^{(2)} &\approx \sqrt{2r} \left\{ k_1 \left(2 \frac{m-1}{m} \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \left(\frac{1}{2} \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{m-2}{m} \cos \frac{\gamma}{2} \right) \right\}, \\ 2Gu_z^{(2)} &\approx \sqrt{2r} \times \\ &\quad \times \left\{ k_1 \left(\frac{1}{2} \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{m-2}{m} \cos \frac{\gamma}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \left(\frac{1}{2} \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} + 2 \frac{m-1}{m} \sin \frac{\gamma}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здійснюючи перехід до полярних складових вектора переміщень отримаємо

$$\begin{aligned} 2Gu_r^{(2)} &\approx \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}} \left\{ k_1 \left[(2k-1) \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{3\gamma}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - k_2 \left[(2k-1) \sin \frac{\gamma}{2} - 3 \sin \frac{3\gamma}{2} \right] \right\}, \\ 2Gu_\gamma^{(2)} &\approx \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}} \left\{ k_1 \left[-(2k+1) \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{3\gamma}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - k_2 \left[(2k+1) \cos \frac{\gamma}{2} - 3 \cos \frac{3\gamma}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

де $k = \frac{3m-4}{m}$, а k_1, k_2 визначаються формулами (3).

На підставі формул (4), (12) [1] показано, що компоненти тензора напружень в довільній точці зовнішньої області $V_2(s > s_0)$ визначаються інтегралами Фур'є

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}^{(2)} &= \int_0^{\infty} (A_{11} S_1 + A_{12} S_2) \lambda \cos \lambda \xi d\lambda, \\ \sigma_{zz}^{(2)} &= \int_0^{\infty} (A_{31} S_1 + A_{32} S_2) \lambda \cos \lambda \xi d\lambda, \\ \sigma_{pz}^{(2)} &= \int_0^{\infty} (A_{21} S_1 + A_{22} S_2) \lambda \sin \lambda \xi d\lambda, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2\lambda s_0 I_0 K_0 - \left(4 \frac{m-1}{\lambda s m} + \lambda s + \lambda s_0^2 s^{-1} \right) I_1 K_1 + \\ &\quad + \frac{3m-2}{m} (s_0 s^{-1} I_0 K_1 - I_1 K_0) + \lambda^2 s_0 (s I_0 K_1 - s_0 I_1 K_0), \\ A_{12} &= \lambda s_0 \times \\ &\quad \times \left(I_1 K_0 - \frac{s_0}{s} I_0 K_1 + \lambda s I_1 K_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 + 2 \frac{m-1}{m} \frac{I_1 K_1}{\lambda s} \right), \\ A_{21} &= \lambda s I_1 K_0 - \lambda s_0 I_0 K_1 + \\ &\quad + \lambda^2 s_0 (s_0 I_1 K_1 - s I_0 K_0) + 2 \frac{m-1}{m} I_1 K_1, \\ A_{22} &= \lambda^2 s_0 (s_0 I_0 K_1 - s I_1 K_0), \\ A_{31} &= \frac{2}{m} K_0 I_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 + \\ &\quad + \lambda^2 s (s K_1 I_0 - s_0 K_0 I_1) - \lambda s K_1 I_1, \\ A_{32} &= \lambda s_0 [\lambda s I_1 K_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 - 2 I_1 K_1]. \end{aligned} \quad (12)$$

В формулах (12) функції Макдональда і Бесселя залежать відповідно від аргументів λs і λs_0 .

Асимптотичний аналіз виразів A_{ij} дає наближення такого вигляду

$$\begin{aligned} A_{11} &\approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} [\lambda(s-s_0) + 1] = \overline{A_{11}}, \\ A_{12} &\approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} \lambda(s-s_0) = \overline{A_{12}}, \\ A_{21} &\approx -\frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} \lambda(s-s_0) = \overline{A_{21}}, \\ A_{22} &\approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} [1 - \lambda(s-s_0)] = \overline{A_{22}}, \\ A_{31} &\approx -\overline{A_{22}}, \quad A_{32} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} [\lambda(s-s_0) - 2] = \overline{A_{32}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Саме ці складові і визначають особливість полів напружень в околі граничного кола циліндричного розрізу. Якщо інтеграли S_1, S_2 проінтегрувати частинами, то їх перше наближення матиме вигляд

$$\int_0^1 \varphi(\tau) J_1(\tau) d\tau \approx -\frac{1}{\tau} \varphi(1) J_0(\tau) + \dots$$

Наступний доданок при інтегруванні особливостей не дає.

Після низки перетворень складові тензора напружень в полярній системі координат були отримані у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \times \\ &\times \left[k_1(3 - \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} + k_2(3 \cos \gamma - 1) \sin \frac{\gamma}{2} \right] + 0(\sqrt{r}) \\ \sigma_{\gamma\gamma} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \times \\ &\times \left[k_1(1 + \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} - 3k_2 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right] + 0(\sqrt{r}) \\ \sigma_{r\gamma} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \left[k_1 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} + k_2(3 \cos \gamma - 1) \cos \frac{\gamma}{2} \right] + 0(\sqrt{r}).\end{aligned}\quad (14)$$

Формули (10), (14) мають місце в областях V_1 і V_2 .

Аналіз (10), (14) показує, що в околі граничного кола циліндричного розрізу поля напружень і переміщень відповідають стану плоскої деформації і як показано в [4] це твердження має місце для просторової тріщини довільної геометрії. Цей висновок співпадає з відомим класичним результатом отриманим Снеддоном [5] при аналізі локального напружено-деформівного стану в околі монетоподібної тріщини.

Список використаних джерел

1. Martynenko M.A. The first major task of the theory of elasticity for a body with a cylindrical crack

2. Panasiuk V. Predelnoe fragile equilibrium tel treschynamy s. - K. Science. opinion., 1968. - 246s.

3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев С.И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.— 752 с.

Від постановки задачі до отримання асимптотичних формул (10), (14) необхідно було виконати не одну сотню аналітичних перетворень.

Найменша похибка методичного характеру або алгебраїчного характеру на будь-якому з етапів перетворень обов'язково б привела до похибки в формулах (10), (14), а значить і до спотворення фізичної суті задачі. Тобто, локальні фізичні поля такого класу задач є найнадійнішим критерієм достовірності методів аналітичного розв'язку від постановки задачі до кінцевих результатів.

Числові результати отримані для найбільш розповсюдженого на практиці випадку, коли пружний простір знаходиться під радіальними рівномірними зусиллями.

Показано, що із двох розрізів однакової площі, той розріз буде більш безпечним у якого параметр $s_0' > s_0''$

of elasticity: monograph /-K.: Education of Ukraine, 2012. - 376 p.

4. M.A. Martynenko. Mixed spatial problems of mathematical theory of elasticity: monograph /-K.: Education of Ukraine, 2012. - 376 p.

5. Sneddon I. Fourier transformation. - Moscow: IL, 1966. - 667 p. M.A. Martynenko. Mixed spatial problems of mathematical theory