ВІДКРИТИЙ МІЖНАРОДНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РОЗВИТКУ ЛЮДИНИ "УКРАЇНА"

ВІСНИК УНІВЕРСИТЕТУ «УКРАЇНА»

СЕРІЯ:

«ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА КІБЕРНЕТИКА»

№ 8, 2010

КИЇВ 2010

УДК 519.6

О. І. Герасін,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

ПРО ІНВАРИАНТНІ МІРИ НА (n -1)-ОПУКЛИХ МНОЖИНАХ

У статті розглядаються задачі, пов'язані з інтегральною геометрією й опуклим аналізом. Докладно викладено узагальнення формули Крафтона для тривимірного простору. Наведено розрахунок формули інваріантної міри для конкретного прикладу.

Ключові слова: задача Бюффона—Сильвестра, інваріантні міри, (n–1)-опуклі множини, геометричні ймовірності, формула Крофтона, міра гіперплощин.

Поняття опуклої множини традиційно визначали через відрізки прямих, що містяться в множині (внутрішнє визначення) або через напівпростори, які містять множину (зовнішнє визначення). У кожному випадку в основу покладали афінну (або лінійну) структуру над упорядкованим полем.

Множина $A \subset R^n$ називається (n–1)-опуклою, якщо через будь-яку точку $x \notin R^n \setminus A$ можливо провести гіперплощину, яка не перетинає A [1].

Легко переконатись у тому, що замкнута або відкрита опукла множина є (n–1)-опуклою, а також, що кожна компонента (n–1)-опуклої множини — опукла.

У [4] доведено лему, яка відіграє важливу роль при дослідженні (n-1)опуклих множин.

Лема 1. (Лема 2 [4]). Нехай $A \subset R^n$ — (n–1)-опукла множина. Тоді будь-які дві компоненти A утворюють (n–1)-опуклу множину.

Ця лема дає змогу звести дослідження (n–1)-опуклих множин, які складаються більш ніж із двох компонент, до дослідження (n–1)-опуклих множин, які складаються із двох компонент. Умова леми 1 необхідна, але недостатня для (n–1) опуклості множини, яка складається з більш ніж із трьох компонент.

Означення 1. Нехай A — множина, що складається з двох непорожніх опуклих компонент A_1 і A_2, тоді для опуклої оболонки B множини A має місце рівність (див. [2])

$$B = \mathrm{conv}(A_1 \cup A_2) = \bigcup_{\substack{x_1 \in A_1 \\ x_2 \in A_2}} x_1 x_2$$

Для кожного відрізка $x_1\, x_2$ визначимо точки $s_1 \in \bar{A}_1$ і найбільш близько розташовані до точок і відповідно визначимо множини S_i, $i = 1,2$, як сукупність точок, побудованих для всіляких відрізків $x_1\, x_2$. Очевидно, $S_1 \subset \partial A_1$ та $S_2 \subset \partial A_2$.

У [3] показані властивості множин S_i, $i = 1,2$ для (n–1)-опуклих множин.

Теорема 1. (Теорема 2 [3]). Нехай $A \subset R^n$ (n–1)-опукла множина, що складається з двох непорожніх опуклих компонент A_1 і A_2. Якщо A_2 — обмежене опукле тіло, то множина $\partial A_2 \setminus S_2$ непорожня і замикання множини S_2 гомеоморфно кулі D^{n-1}.

Для множин, що не є (n–1)-опуклими, це невірно.

Теорема 2. Нехай $A \subset R^n$ (n–1)-опукла множина, що складається з двох непорожніх компонент — обмежених опуклих тіл A_1 і A_2. Тоді точки замикання множин S_i, $i = 1,2$, не можуть бути точками гладкості (див. [2, с. 101]).

Критерій (n–1)-опуклості для множини, що складається з двох непорожніх компонент — обмежених опуклих тіл A_1 і A_2 надано у [3].

Міра множини площин, інваріантна відносно групи всіх рухів R^3, визначається як інтеграл по множині від диференціальної форми [8, (12.40)].

Приклад 1. Нехай μ^2-скінченна міра у просторі площин, інваріантна відносно групи всіх трансляцій і поворотів у R^3. З [9] відомо, що

$$\mu^2(K) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} l(\rho_{\vartheta\varphi}K)\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta, \qquad (1)$$

де $K \subset R^3$ — компактна опукла множина, $\mu^2(K)$ — міра площин, які перетинають множину K (формули для деяких опуклих множин можна знайти в [6]; $l(\rho_{\vartheta\varphi}K)$ — довжина ортогональної проекції K на пряму, що проходить через (0,0,0) у напрямку ($\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\varphi$).

Мінківським визначено суму опуклих множин $A \oplus B$ [2].

Означення 2. Нехай A і B — непорожні опуклі множини у R^n, радіус-вектори точок $a \in A$ і $b \in B$ співвіднесені до початку координат O. Тоді (залежну від вибору O) множину

$$A \oplus B = \{z \in R^n \mid z = a + b, a \in A, b \in B\}$$

будемо називати сумою A і B.

Позначимо через K^S множину, симетричну опуклій множині K відносно центра ваги множини K [6].

Означення 3. Нехай $B \subset R^n$ — множина, яка складається з двох обмежених опуклих тіл B_1 і B_2, 0_1 і 0_2 — центри ваги тіл B_1 і B_2 відповідно і нехай $B_2^N = t(B_2 \oplus B_1^S)$ (i = 1,2), де t — трансляція множин $(B_2 \oplus B_1^S)$, при якій центр тяжіння його збігається з центром тяжіння множини B_2. Позначимо через B_2^D множину $conv(0 \bigcup B_2^N)$ (i = 1,2), а $\mu^{n-1}(> B_1, B_2 <)$ — міру гіперплощин, що розділяють множини B_i (i = 1,2) [7].

Далі маємо узагальнити формули Крофтона.

Теорема 3. Нехай $B \subset R^n$ — множина, що складається з двох обмежених опуклих тіл B_1 і B_2. Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють тіла B_1 і B_2, дорівнює

$$\mu^{n-1}(> B_1, B_2 <) = \mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N).$$

Доказ надано [7].

Наслідок 1.

Позначимо як B^C опуклу оболонку тіл B_1 і B_2, $B^C = conv(B_1 \bigcup B_2)$. Після цього ми маємо:

а) міра множини всіх гіперплощин, що перетинають хоча б одне з тіл B_1 і B_2, дорівнює $\mu^{n-1}(B^C) - (\mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N))$;

б) міра множини всіх гіперплощин, що перетинають тіло B_i і не перетинають B_{3-i}, де i = 1,2, дорівнює $\mu^{n-1}(B^C) - (\mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N)) - \mu^{n-1}(B_2)$;

в) міра множини всіх гіперплощин, що перетинають тіла B_1 і B_2, дорівнює $\mu^{n-1}(B_1) + \mu^{n-1}(B_2) + \mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N) - \mu^{n-1}(B^C)$.

У [8, с. 194–197] вказані інтеграли середньої кривизни M(K) деяких опуклих множин. Існує таке співвідношення між інтегралами середньої кривизни та міра множини всіх гіперплощин, що перетинають множину K:

$$\mu^2(K) = \frac{M(K)}{2\pi}.$$

Нам знадобляться формули для мір деяких стандартних опуклих множин.

Маємо наступні $\mu^2(K)$ опуклих множин $K \subset R^3$.

Приклад 2.

а) Для кулі радіусом R:

$$\mu^2(K) = 2R.$$

б) Для прямого паралепіпеда з довжиною ребер a_1, a_2, a_3:

$$\mu^2(K) = \frac{a_1 + a_2 + a_2}{2}.$$

в) Для куба з довжиною ребра a:

$$\mu^2(K) = \frac{3a}{2}.$$

г) Для конуса обернення з висотою h, радіусом основи R:

$$\mu^2(K) = \frac{\pi R + h - R\,arctg(h/R)}{2}.$$

д) Для півкулі:

$$\mu^2(K) = R(1 + \frac{\pi}{4}).$$

7. Для циліндра обернення з висотою h, радіусом основи R:

$$\mu^2(K) = \frac{h + \pi R}{2}.$$

Приклад 3. Для плоскої опуклої множини K з периметром P, яку розглядаємо як опуклу множину у R^3, маємо:

$$\mu^2(K) = \frac{P}{4}.$$

Випадок кола з радіусом R:

$$\mu^2(K) = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Відрізок довжиною L має периметр $2L$:

$$\mu^2(K) = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}.$$

Квадрат зі стороною а:

$$\mu^2(K) = \frac{4a}{4} = a.$$

Із [2] маємо наступне твердження 1.

Твердження 1. Нехай A і B — непусті опуклі множини у R^n. Якщо C — опукла множина і $C = A \oplus B$,

$$\mu^{n-1}(C) = \mu^{n-1}(A) + \mu^{n-1}(B).$$

Наслідок 2. Формули з прикладу 2 легко здобути, якщо сумувати прямокутник зі сторонами a_1, a_2 і відрізок a_3, а формулу е — якщо сумувати коло радіуса R і відрізок довжиною h.

Теорема 4. Нехай K^2 = скруглений квадрат $K^2 = D^2 \oplus P$, де D — коло радіуса R, P — квадрат, ща має сторону a. K^K — конус з висотою H, основа якого є скруглений квадрат. Міра множини всіх площин, що перетинають множину K^K,

дорівнює

$$\mu^2(K^K) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{a}{2}(\pi-\alpha) + \frac{H\sin^2\alpha}{2} + \frac{a}{4}\sin 2\alpha + R\cos\alpha + R\, d\varphi; \qquad (2)$$

де $a = \frac{\sqrt{2}H}{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$.

Доведення. Розташуємо систему координат. Поперечний переріз.

Рівнобедрений трикутник ABC. $AB = BC$. Висота BO лежить на осі OZ. Точки A та C на осі X на відстані a від O. $BO = H$. Точки A та C є центрами двох кіл радіуса R. Перетин кола з центром C, з дотичною в точці B є K.

$|BC| = \sqrt{H^2 + a^2}$. $|BK| = \sqrt{H^2 + a^2 - R^2}$. Позначимо $\alpha_1 = \angle OBC$, $\alpha_2 = \angle CBK$,

$\alpha_3 = \angle OBK = \alpha_1 + \alpha_2$.

Із цього маємо: $\sin\alpha_1 = \frac{OC}{BC} = \frac{a}{\sqrt{H^2 + a^2}}$.

$\sin\alpha_2 = \frac{CK}{BK} = \frac{R}{\sqrt{H^2 + a^2}}$.

$$\sin\alpha = \cos\alpha_3 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = = \frac{H\sqrt{H^2 + a^2 - R^2} - aR}{H^2 + a^2}; \qquad (3)$$

$$\cos\alpha = \sin\alpha_3 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = = \frac{a\sqrt{H^2 + a^2 - R^2} + HR}{H^2 + a^2}; \qquad (4)$$

$$I_1 = \int_0^{\alpha} H\cos\theta\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{H\sin^2\alpha}{2}.$$

$$I_2 = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a\sin\theta\sin\vartheta\, d\vartheta + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} R\sin\vartheta\, d\vartheta = = \frac{a}{2}(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \frac{a}{4}\sin 2\alpha + R\cos\alpha;$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin\theta\sin\vartheta\, d\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{a\pi}{4} + R;$$

$$I = I(\rho_\varphi K) = \frac{a}{2}(\pi - \alpha) + \frac{H\sin^2\alpha}{2} + \frac{a}{4}\sin 2\alpha + R\cos\alpha + R.$$

Звідси маємо

$$\mu^2(K^K) = I(a,H,R),$$

де $$I(a,H,R) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{a}{2}(\pi - \alpha) + \frac{H\sin^2\alpha}{2}, + \frac{a}{4}\sin 2\alpha + R\cos\alpha + R\, d\varphi$$

$$a = \frac{\sqrt{2}H}{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4}).$$

Позначимо через D — кулю радіуса R, через C — куб, що має ребро H. Розглянемо опукле тіло $D_C = D \oplus C$. Така фігура має назву скруглений куб. Він має 6 граней, кожна з яких має по чотири ребра, вісім сегментів кулі радіуса R. Його можна представити як систему з восьми куль радіуса R — D_i, де i = 1, 8, що розташовані у вершинах куба C з ребром H. Скруглений куб $D_C = \mathrm{conv}(\bigcup_i^n D_i)$ опукла оболонка множини D_i, де $i = 1,8$.

Основним результатом цієї роботи є теорема 5.

Теорема 5. Нехай D_C — скруглений куб $D_C = D \oplus C$, де D — куля радіуса R, C — куб, що має ребро H.

Тоді:

а) міра множини всіх площин, що перетинають множину D_C:

$$\mu^2(D_C) = \frac{3H + 4R}{2};$$

б) міра множини всіх площин, що розділяють чотири кулі D_C від чотирьох інших куль:

$$\mu^2(> Z <) = I(a,H,R) - (\pi R + 2H),$$

де $$I(a,H,R) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{a}{2}(\pi - \alpha) + \frac{H\sin^2\alpha}{2} + \frac{a}{4}\sin 2\alpha + 2R\cos\alpha + 2R\, d\varphi,$$

$$a = \sqrt{2}H\cos(\varphi - \frac{\pi}{4}).$$

$$\sin\alpha = \frac{H\sqrt{H^2 + a^2 - (2R)^2} - 2aR}{H^2 + a^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{H^2 + a^2 - (2R)^2} + 2HR}{H^2 + a^2}.$$

Доведення:

Пункт *а*, випливає з твердження 1 і пунктів *а* та у прикладі 2.

Доведемо пункт *б*.

Розташуємо тривимірну систему координат так, щоб центр O збігався з центром основи куба C. Тоді центр верхньої грані куба C має координати $(0, 0, H)$.

Далі знайдемо міру площин, що розділяють чотири верхні кулі від нижніх.

Застосуємо теорему 3, маємо конус K_C з верщиною в точці $(0, 0, H)$.

Основа $P_C = D \oplus P$, де P — квадрат, сторона якого дорівнює $2H$. D — куля радіуса $2R$. Скориставшись теоремою 5, одержимо

$$\mu^2(K_C) = I(a,H,R),$$

де $$I(a,H,R) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{a}{2}(\pi - \alpha) + \frac{H\sin^2\alpha}{2} + \frac{a}{4}\sin 2\alpha + 2R\cos\alpha + 2R\,d\varphi,$$

$$a = \sqrt{2}H\cos(\varphi - \frac{\pi}{4}).$$

Міра множини всіх площин, що перетинають множину P_C:

$$\mu^2(P_C) = 4R + 2H = 2(2R + H).$$

Теорему доведено.

Міра множини всіх площин, що перетинають множину K_C, і не перетинають P_C:

$$\mu^2(K_C / P_C) = I(a,H,R) - 2(2R + H).$$

За умови $0{,}5H \geq R \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.H$ маємо три множини, що розділяють скруглений куб D_C на групи по чотири кулі. Тому міра множини всіх площин, що перетинають множину D_C і не перетинають жодну з куль:

$$\mu^2(> D_{2C} <) = \mu^2(D_C) - 3\mu^2(K_C / P_C) = 3{,}5H + 4R - 3I(a,H,R).$$

<u>Наслідок 3:</u> Нехай D_C = скруглений куб $D_C = D \oplus C$, де D — куля радіуса R, C — куб, що має ребро H. Якщо $0{,}5H \geq R \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.H$, то міра множини всіх площин, що перетинають множину D_C і не перетинають жодну з куль:

$$\mu^2(> D_{2C} <) = 3{,}5H + 4R - 3I(a,H,R),$$

де $$I(a,H,R) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{a}{2}(\pi - \alpha) + \frac{H\sin^2\alpha}{2} + \frac{a}{4}\sin 2\alpha + 2R\cos\alpha + 2R\,d\varphi,$$

$$a = \sqrt{2}H\cos(\varphi - \frac{\pi}{4}).$$

$$\sin\alpha = \frac{H\sqrt{H^2 + a^2 - (2R)^2} - 2aR}{H^2 + a^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{H^2 + a^2 - (2R)^2} + 2HR}{H^2 + a^2}.$$

Скориставшись засобами Microsoft Excel, мовою VBA обчислимо конкретний приклад $R = \frac{\sqrt{2}}{2}.H$:

H	R	$I(a,H,R)$	$\mu^2(P_c)$	$\mu^2(K_c / P_c)$	$\mu^2(D_c)$	$\mu^2(>D_{2c}<)$
10,000	3,536	34,166	34,142	0,024	49,142	49,071

В работе рассматриваются задачи, связанные с интегральной геометрией и выпуклым анализом. Подробно рассматривается обобщение формулы Крофтона для трехмерного пространства. Приведен расчет формулы инвариантной меры для конкретного примера.

Ключевые слова: задача Бюффона—Сильвестра, инвариантные меры, $(n-1)$ опуклые множества, геометрические вероятности, формула Крофтона, мера гиперплоскостей.

The problems related to integral geometry and convex analysis are considered in this paper. Generalization of Crofton formula is consider for three-dimensional space in detail. Calculation of formula invariant measure is obtained.

Key words: Buffon-Silvestr problem, invariant measure, (*n*–1)-convex body, geometrical probability, Crofton formula, measure of hyperplanes.

Література

1. *Silvestr J. J.* On a funicular solution of Buffon's «Problem of the needle» in its most general form / Acta Math. — 1890. — 14 . — P. 185–205.
2. *Лехтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1965. — 336 с.
3. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. — К. : Наук. думка, 1993. — 264 с.
4. *Герасин А. И.* Об (n-1)-выпуклых множествах // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии: сб. науч. тр. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1988. — С. 8–14.
5. *Герасин А. И.* Обозримость (n-1)-выпуклых множеств // Комплексный анализ, алгебра и топология: сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 20–28.
6. *Герасин А. И.* Об инвариантных мерах. — К., 1994. — 6 с. (Препр. АН Украины. Ин-т математики).
7. *Герасин А. И.* О мерах на (n-1)-выпуклых множествах. — К., 1984. — 28 с. — (Препр. АН Украины. Ин-т математики).
8. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. — М. : Наука, 1983. — 360 с.
9. *Амбарцумян Р. И., Мекке Л., Штоян Л.* Введение в стохастическую геометрию. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
10. *Герасін О. І.* Про інваріантні міри у тривімірному просторі // Науковий вісник АМУ. Автоматизація та комп'ютерноінтегровані технології управління. Серія «Техніка». — К., 2008.
11. *Герасін О. І.* Про геометричні ймовірності // Вісник університету «Україна». — 2008. — № 6. — С. 93–96.