

МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

А.С.Богатирчук, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет харчових технологій

В.А.Максимюк, докт. фіз.-мат. наук,

Є.А.Сторожук, докт. фіз.-мат. наук

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Тонкостінні елементи конструкцій, несучі поверхні яких є багатозв'язними областями складної форми, знаходять широке застосування в різноманітних областях техніки.

Довільну тонку оболонку, яка знаходиться під дією поверхневого $\{q\} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$ і крайового $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$ статичного навантаження, віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$.

Нехай область (Σ) зміни координат параметризації серединної поверхні оболонки має більше чотирьох кутових точок, в якій не всі контурні лінії збігаються з координатними лініями. Для отримання розв'язувальних рівнянь розбиваємо область (Σ) на (K_ϕ) криволінійних чотирикутних фрагментів (Σ_k) , параметризація яких здійснюється за допомогою складеної функції [2]:

$$\alpha_1(\xi_1, \xi_2) = P_{\alpha_1}(\xi_1, \xi_2) + P_{\alpha_1}(\xi_2, \xi_1) - R_{\alpha_1}(\xi_1, \xi_2) \quad (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2);$$

$$P_{\alpha_1}(\xi_1, \xi_2) = \alpha_1(\xi_1) \Big|_{\xi_2=-1} N_1(\xi_2) + \alpha_1(\xi_1) \Big|_{\xi_2=1} N_2(\xi_2);$$

$$R_{\alpha_1}(\xi_1, \xi_2) = \alpha_1 \Big|_{\xi_1=\xi_2=-1} N_1(\xi_1) N_1(\xi_2) + \alpha_1 \Big|_{\xi_1=1; \xi_2=-1} N_2(\xi_1) N_1(\xi_2) +$$

$$+ \alpha_1 \Big|_{\xi_1=-1; \xi_2=1} N_1(\xi_1) N_2(\xi_2) + \alpha_1 \Big|_{\xi_1=\xi_2=1} N_2(\xi_1) N_2(\xi_2);$$

$$N_1(\xi_1) = 0,5(1 - \xi_1); \quad N_2(\xi_1) = 0,5(1 + \xi_1) \quad (\xi_1 \rightarrow \xi_2),$$

де ξ_1, ξ_2 – координати параметризації фрагмента (Σ_k) , які змінюються в межах від -1 до $+1$;

$\alpha_1(\xi_1) \Big|_{\xi_2=\pm 1}, \alpha_1(\xi_2) \Big|_{\xi_1=\pm 1} \quad (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$ – рівняння контурних ліній фрагмента; $\alpha_1 \Big|_{\xi_1=\pm 1; \xi_2=\pm 1} \quad (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$

– координати вершин фрагмента.

Геометричні співвідношення запишемо у векторній формі на основі теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа-Лява [2]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_1; & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2} \cdot \vec{e}_1; \\
\mu_{11} &= -\frac{\partial \vec{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_1; & 2\mu_{12} &= -\frac{\partial \vec{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_2 - \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_2 \partial \alpha_2} \cdot \vec{e}_1; \\
\varphi_1 &= \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} \quad (1 \rightarrow 2),
\end{aligned} \tag{2}$$

де A_1, A_2 – параметри Ламе; $\vec{u} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$; $\vec{\varphi} = \varphi_1\vec{e}_1 + \varphi_2\vec{e}_2$ – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній.

Вихідним в запропонованій методиці розв’язання крайових задач для оболонок складної форми є змішаний функціонал, в якому геометрична частина гіпотез Кірхгофа – Лява реалізована методом множників Лагранжа [1]:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (T_{11}\varepsilon_{11} + T_{22}\varepsilon_{22} + T_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\mu_{11} + M_{22}\mu_{22} + 2M_{12}\mu_{12}) d\Sigma - \\
&- \iint_{\Sigma_n} (q_1 u + q_2 v + q_3 w) d\Sigma - \int_{\Gamma_k} (T_k u_\sigma + S_k u_\tau + Q_k w - M_k \varphi_\sigma) dS + \\
&+ \iint_{\Sigma} \left[T_{13}^f \left(\varphi_1 - \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} \right) + T_{23}^f \left(\varphi_2 - \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2} \right) \right] d\Sigma.
\end{aligned} \tag{3}$$

Отриманий в такий спосіб функціонал (3) для тонких оболонок не містить похідних вище першого порядку, а множники Лагранжа T_{13}^f, T_{23}^f , на відміну від інших подібних підходів, є такими ж варійованими функціями як і основні розв’язувальні функції задачі (переміщення, кути повороту).

Система розв’язувальних рівнянь отримана з умов стаціонарності функціоналу (3) за допомогою методу скінченних елементів.

Конкретні числові розрахунки виконані для циліндричної і сферичної оболонок, послаблених двома круговими отворами. Вивчено вплив геометричних і фізико-механічних параметрів на напружено-деформований стан оболонок в області отворів.

Література

1. Максимюк В.А. Про застосування методу множників Лагранжа в задачах статки композитних оболонок // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 75–79.
2. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 613–687.