

НАГРЕВАНИЕ ТРУБКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Бородин Виталий Алексеевич

Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна,
matemat@nuft.edu.ua

Варка каши это теплообменный процесс, при котором происходит и массообмен – происходит экстрагирование, сорбция, растворение. Часть растворимых веществ (белки, углеводы, минеральные соли, экстрактивные и красящие вещества, витамины) переходит в жидкость. Весь процесс варки можно разбить на два этапа. Первый этап состоит в нагревании жидкости до температуры кипения, второй – в нагревании продукта до требуемой температуры. На первом этапе нагревание жидкости происходит благодаря конвекции и теплопроводности в жидкости, при котором в следствии увеличения количества растворимых веществ состав жидкости меняется. Второй этап – перенос теплоты от поверхности продукта к его центральной части осуществляется теплопроводностью по капиллярам продукта, заполненного жидкостью. Состав жидкости в капиллярах меняется со временем. Поэтому представляет интерес изучение нагревания заполненной жидкостью трубки с теплоизолирующей боковой поверхностью, у которой коэффициент теплопроводности жидкости меняется со временем.

Процесс распространения тепла в жидкости в трубке, расположенной на оси Ox , $0 \leq x \leq l$, описывается функцией $u = u(x; t)$, которая определяет температуру жидкости в сечении x в момент времени t . Тепловые потоки, характеризующиеся теплопроводностью, определяются законом Фурье: количество тепла протекающее через сечение x за промежуток времени $(t; t + \Delta t)$ равно $\Delta Q = -k(t) \frac{\partial u}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t$, где $k(t)$ – коэффициент теплопроводности, зависящий от состава жидкости, и который будет меняться в связи с изменением со временем состава жидкости, S – площадь сечения трубки.

Количество тепла поступившее на элемент внутренности трубки $(x; x + \Delta x)$ за время Δt равно

$$\Delta Q = k(t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t \Big|_{x+\Delta x} - k(t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t \Big|_x \approx k(t) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot S \cdot \Delta t \Big|_{x+\theta \cdot \Delta x}, \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Это тепло идёт на нагревание элемента внутренности трубки $(x; x + \Delta x)$ на величину Δu : $\Delta Q = c \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta u$, где c – теплоёмкость жидкости, ρ – плотность жидкости. Приравняем количество тепла

$$k(t) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bigg|_{x+\theta \cdot \Delta x} \cdot S \cdot \Delta t = c \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta u.$$

При переходе к пределу $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ получим $k(t) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$.

Обозначим $a^2(t) = \frac{k(t)}{c \cdot \rho}$, получим уравнение теплопроводности с коэффициентом теплопроводности зависящим от времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, 0 \leq t < \infty. \quad (1)$$

Второй этап нагревания при варке каши (подвод тепла по капиллярам) сводится к краевой задаче для уравнения теплопроводности. Рассмотрим одну из краевых задач. Найти решение уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, 0 \leq t < \infty, \quad (2)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x; 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u(0; t) = T_0, u(l; t) = T_1. \quad (4)$$

Сделаем замену $U(x; t) = u(x; t) - \left(T_0 + \frac{T_1 - T_0}{l} x \right)$, $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \left(T_0 + \frac{T_1 - T_0}{l} x \right)$.

Функция $U(x; t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2(t) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5)$$

и условиям

$$U(x; 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (6)$$

$$U(0; t) = 0, U(l; t) = 0. \quad (7)$$

Краевую задачу (5), (6), (7) решим методом разделения переменных.

Решение уравнения

$$U'_t = a^2(t) \cdot U''_{x^2}$$

удовлетворяющее условиям

$$U(0; t) = 0, U(l; t) = 0$$

будем искать в виде $U(x; t) = X(x) \cdot T(t)$, где $X(x)$ – функция только переменной x , $T(t)$ – функция только t . Подставим функцию в уравнение получим

$$\frac{1}{a^2(t)} \cdot \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

где λ – постоянная, поскольку первая часть равенства зависит только от t , а вторая только от x . Граничные условия дают $X(0) = 0, X(l) = 0$.

Для нахождения функции функции $X(x)$ получили краевую задачу

$$X'' + \lambda^2 X = 0, X(0) = 0, X(l) = 0.$$

Нетривиальное решение возможно при $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, n = 1, 2, \dots$, которым соответствуют

собственные функции $X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$.

Функции $T_n(t)$ будут находиться из уравнения

$$\frac{1}{a^2(t)} \cdot \frac{T'_n}{T_n} = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Решим уравнение разделением переменных,

$$\frac{dT_n}{T_n} = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cdot a^2(t) \cdot dt, T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 A(t)},$$

где $A(t) = \int_0^t a^2(t) dt, C_n = \text{const.}$

Каждая из функций

$$U_n(x; t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x$$

удовлетворяет уравнению и нулевым краевым условиям. Функцию, которая дополнительно удовлетворяет начальному условию (6) ищем в виде

$$U_n(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 A(t)} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Коэффициент C_n находим из условия (6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi_1(x).$$

Следовательно $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt, n = 1, 2, \dots$

Решение краевой задачи (5)–(7) имеет вид

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt \cdot e^{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 A(t)} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Выполняя линейную замену найдём решение $u(x, t)$ краевой задачи (2)–(4).

Список литературы:

- 1) А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Уравнения математической функции, Издательство МГУ, Наука, 2004, 798с.
- 2) А.М. Поперечный, Процеси та апарати харчових виробництв.-К., 2007, 380с.