

УДК № 517.9.

О.М.Станжицький, А.М.Ткачук (КНУ ім.Т.Шевченка, Київ)

O.M.Stanzhytsky, A.M.Tkachuk

ДИСИПАТИВНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ВІДПОВІДНИХ ЇМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

DISSIPATIVE OF DIFFERENTIAL AND CORRESPONDING FOR THEM DIFFERENCE EQUATIONS

Встановлені умови, при яких з існування обмеженого розв'язку у різницевого рівняння випливає існування обмеженого розв'язку відповідного диференціального рівняння. Досліджено зв'язок між дисипативністю диференціальних та різницевих рівнянь в термінах функції Ляпунова.

Detected the conditions under which from existence of limited solution of difference equation follows existence of limited solution of corresponding differential equation. It is researched connection between dissipative of differential and difference equations in terms of Lyapunov function.

1. Вступ. Ефективним методом дослідження диференціальних рівнянь є перехід до різницьових рівнянь, які отримуються з диференціальних заміною похідної відповідним різницьовим відношенням. Але методи розроблені в теорії різницьових схем, дозволяють в основному встановлювати близькість розв'язків та відповідність властивостей диференціальних і різницьових рівнянь лише на скінченних інтервалах часу. Питання ж якісної відповідності між розв'язками різницьових та диференціальних рівнянь на нескінченних інтервалах часу досить мало вивчене. Відмітимо в цьому напрямку роботи [1] - [4], де розглядалися умови збереження властивостей періодичності, стійкості, коливності у диференціальних рівнянь при наявності аналогічних властивостей у відповідних різницьових рівнянь і навпаки.

2. Постановка задачі. Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (1)$$

і відповідна їй система різницьових рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h) \quad (2)$$

$k \in \mathbb{Z}$, $h > 0$ – крок різницьового рівняння,

$$x_k^h = x^h(t_0 + kh), \quad x^h(t_0) = x_0^h, \quad x(t_0) = x_0.$$

Нехай вектор-функція $X(t, x)$ визначена при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$ (D – деяка область простору $\mathbb{R}^n$), $t_0 \in \mathbb{R}$.

Метою роботи є вивчення питання про зв'язок між обмеженими розв'язками систем (1) та (2) і дослідження умов дисипативності цих систем.

3. Основні результати.

1) Зв'язок між обмеженими розв'язками диференціальних та різницевих систем.

В даному пункті будемо вважати, що функція $X(t, x)$ в області $\mathbb{R} \times \mathbb{D}$ є неперервно-диференційовною і обмеженою разом зі своїми частинними похідними так, що:

$$|X(t, x)| + \left| \frac{\partial X(t, x)}{\partial t} \right| + \left\| \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \right\| \leq C_0.$$

Приведена нижче теорема гарантує існування обмеженого двохстороннього розв'язку системи (1) при умові, що система (2) має такий розв'язок.

Теорема 1 . *Якщо існує $h_0 > 0$, що при $0 < h \leq h_0$ система (2) має рівномірно по t_0 і h асимптотично стійкий, двохсторонній обмежений розв'язок x_k^h , що лежить в області $\mathbb{D}$ разом з деяким ρ -околом, тоді система (1) також має обмежений двохсторонній розв'язок.*

Доведення. В силу умов теореми для довільного $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \frac{\rho}{2}$) існують, незалежні від t_0 і h , $\delta > 0$ і $T > 0$ такі, що якщо

$$|x_0^h - y_0^h| \leq \delta, \tag{3}$$

то

$$|x_k^h - y_k^h| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{при} \quad k \geq 1 \tag{4}$$

$$|x_k^h - y_k^h| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \text{при} \quad kh \geq T. \tag{5}$$

Виберемо $k_0(h)$ так, що $T \leq k_0 h \leq T + 1$. І, оскільки, система (2) має для кожного $h \leq h_0$ обмежений розв'язок x_k^h , то існує $C_1(h) > 0$, що

$$|x_k^h| \leq C_1(h), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $x(t)$ – розв’язок системи (1), який в точці t_0 збігається з розв’язком системи (2) y_k^h , де y_k^h задовольняє умови (3), (4), (5), тобто

$$y_0^h = x(t_0). \quad (6)$$

Виберемо крок h таким чином, щоб виконувалась нерівність

$$he^{C_0(T+1)}[1 + (C_0 + C_0^2)(T + 1)] \leq \frac{\delta}{2}. \quad (7)$$

Тоді, як випливає з [5, с. 384], для розв’язків систем (1) та (2), що задовольняють умову (6), справедлива оцінка:

$$|y_m^h - x(t_0 + mh)| \leq \frac{\delta}{2}, \quad m \leq k_0, \quad (8)$$

якщо вони визначені на відрізку $[t_0, t_0 + k_0h]$.

З (4), (5) та (8) отримаємо нерівність

$$|x_{k_0}^h - x(t_0 + k_0h)| \leq \delta.$$

Надалі будемо розглядати відрізок довжини $k_0h \leq T + 1$. З інтегрального представлення $x(t)$ – розв’язку системи (1) отримаємо оцінку:

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t_0+t} |X(s, x(s))| ds, \quad t \in [0, k_0h].$$

Звідки

$$|x(t)| \leq C_1(h) + \delta + C_0(T + 1) \quad (9)$$

Отже, розв’язок системи (1) – $x(t)$, що починається в δ -околі x_0^h , в момент k_0h знову попадає в його δ -оکیل, задовольняючи при цьому нерівність (9), при умові, що $x(t)$ визначений на відрізку $[0, k_0h]$. Покажемо, що цього можна досягти вибором достатньо малого кроку h .

Виберемо $\varepsilon > 0$ таким, щоб точки з ε -околу обмеженого розв'язку x_k^h системи (2) лежали в області $\mathbb{D}$ разом з $\frac{\rho}{2}$ -околом. В силу умов теореми такий вибір можливий. А тому розв'язки системи (1), що починаються в такому $\frac{\rho}{2}$ -околі продовжуються вліво і вправо на інтервал довжини не меншої ніж $\frac{\rho}{2C_0}$. Виберемо h таким, щоб виконувалась нерівність (7) і нерівність $h < \frac{\rho}{2C_0}$, та зафіксуємо його.

Тоді розв'язок $x(t)$, що починається в δ -околі x_0^h продовжується на інтервал $[0, \frac{\rho}{2C_0}]$, а в точці $t = h$ в силу (8) виконується нерівність:

$$|x(h) - y_1^h| \leq \frac{\delta}{2},$$

де y_k^h – вказаний вище розв'язок системи (2).

Отже точка $x(h)$ лежить в області $\mathbb{D}$ разом з $\frac{\rho}{2}$ -околом, а тому розв'язок $x(t)$ продовжується до точки $2h$ і $x(2h)$ також лежить в $\mathbb{D}$ разом з $\frac{\rho}{2}$ -околом. Продовжуючи цей процес, переконуємось, що $x(t)$ визначений на відрізку $[0, k_0h]$.

Тепер розглянемо наступний відрізок довжини $k_0h \leq T + 1 - [t_0 + k_0h, t_0 + 2k_0h]$. На ньому $x(t)$, аналогічно попередньому, задовольняє нерівність

$$|x(t)| \leq C_1(h) + \delta + C_0(T + 1).$$

Позначимо через $\hat{y}_k^h$ – розв'язок системи (2), що в момент k_0h його початкові дані збігаються з початковими даними розв'язку $x(t)$:

$$x(k_0h) = \hat{y}_{k_0}^h.$$

Тоді, аналогічно попередньому, будемо мати нерівність

$$|x_{2k_0}^h - x(2k_0h)| \leq \delta.$$

Продовжуючи далі цей процес, отримаємо, що на кожному відрізку довжини k_0h справедливою буде оцінка:

$$|x(t)| \leq C_1(h) + \delta + C_0(T + 1).$$

А в моменти pk_0h розв'язок системи (1) – $x(t)$ не виходить з δ -околу обмеженого розв'язку x_k^h системи (2). Звідси випливає його обмеженість при $t \geq t_0$.

Таким чином для довільного $t_0 \in \mathbb{R}$ нами побудовано обмежений розв'язок $x(t)$ системи (1) при $t \geq t_0$. Побудуємо тепер обмежений на всій осі розв'язок $x(t)$ цієї системи.

З вище сказаного випливає, що всі розв'язки диференціального рівняння, які починаються в δ -околі розв'язку x_k^h , задовольняючи нерівність (9), при $t = k_0h$ попадають знову в його δ -окіл. А тому обмежені розв'язки $x(t)$ диференціального рівняння, які при $t = -k_0h$ починаються в δ -околі точки $x^h(-k_0)$, при $t = 0$ попадають знову в δ -окіл точки $x^h(0)$.

Аналогічно можна показати, що всі обмежені розв'язки системи (1), які при $t = -pk_0h$ починаються в δ -околі точки $x^h(-pk_0)$, задовольняючи нерівність (9), при $t = -(p-1)k_0h$ знову попадають в δ -окіл точки $x^h(-(p-1)k_0)$.

Позначимо через $\mathbb{S}_p$ – множину значень розв'язків системи (1) в точці $t = 0$, які при $t = -pk_0h$ лежать в δ -околі $x^h(-pk_0)$. В силу вище сказаного, ця множина не порожня для довільного натурального p і при цьому справедливе включення $\mathbb{S}_p \subset \mathbb{S}_{p-1}$. За своєю побудовою множини $\mathbb{S}_p$ складаються з образів розв'язків рівняння (1) в точці $t = 0$, що починаються в точці $t = -pk_0h$. Відображення, що породжує $\mathbb{S}_p$, є неперервним в силу неперервної залежності розв'язку від початкових даних, а тому $\mathbb{S}_p$ замкнуті (як образи замкнутих множин при неперервному відображенні). Оскільки вони також і компактні, що лежать в δ -околі $x^h(0)$, то їх перетин непорожній.

Нехай y_0 – точка спільна для всіх S_p .

Розглянемо тепер розв’язок диференціального рівняння $x(t)$, що $x(0) = y_0$. Даний розв’язок за своєю побудовою продовжуваний вліво і при $t = -pk_0h$ належить δ -околу $x^h(-pk_0)$ для довільного натурального p , де x_k^h – обмежений розв’язок системи (2), що фігурує в теоремі. А тому він необмежено продовжуваний вліво і задовольняє нерівність (9). А значить є обмеженим. Його продовжуваність вправо і обмеженість при $t \geq 0$ очевидні. Теорема доведена.

2) Дисипативність різницевих систем.

Нехай розв’язки системи (1) визначені при $t \geq 0$. Розглянемо питання пов’язані із дисипативністю систем (1) та (2). Дисипативність систем (1) та (2) будемо розуміти в сенсі наступних означень.

Означення 1 . ([6]) Система (1) називається дисипативною при $t \geq 0$, якщо існує число $R > 0$, що для довільного $r > 0$ існує $T = T(r, t_0)$, що розв’язок $x(t, t_0, x_0)$ системи (1) такий, що $|x_0| < r$, $t_0 \geq 0$, при $t \geq T$ задовольняє нерівність

$$|x(t, t_0, x_0)| < R.$$

Означення 2 . Систему (2) назовемо дисипативною при $k \geq 0$, якщо існує $R(h)$, що для довільного $r > 0$ можна вказати $T = T(t_0, r, h)$, що розв’язок системи (2) x_k^h при $kh \geq T$ знаходиться в кулі радіуса R : $x_k^h \in U_R$, якщо $x_0^h \in U_r$.

Означення 3 . Систему (2) назовемо рівномірно дисипативною по $h \leq h_0$, якщо в означенні 2 R та T не залежать від h .

Наступний результат є аналогом умов дисипативності систем диференціальних рівнянь в термінах функції Ляпунова [6] для систем різницевих рівнянь. Має місце теорема.

Теорема 2 . Якщо система (2) для кроку $h > 0$ має невід'ємну функцію Ляпунова $V_h(t, x)$, визначену в області $t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n$, таку, що:

1. виконується умова

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}_+; |x| \geq R} V_h(t_0 + kh, x) = V_{h,R} \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty. \quad (10)$$

2. Існують $C = C(h) > 0$ та $C_1 = C_1(h) > 0$ такі, що

$$V_h(t_0 + (k+1)h, x + hX(kh, x)) - V_h(t_0 + kh, x) \leq -C(h)V_h(t_0 + kh, x)h + C_1(h)h,$$

то система (2) дисипативна для даного $h > 0$, при умові $C(h)h < 2$.

Якщо ж в умовах теореми $V(t, x)$, C_1 та C не залежать від h і співвідношення (10) виконується рівномірно по $h \leq h_0$, то система (2) рівномірно дисипативна.

Доведення. Нехай x_k^h розв'язок системи (2), що $x_0^h = x_0 \in U_r$. Тоді

$$V_h(t_0 + kh, x + hX((k-1)h, x)) \leq (1 - C(h)h)V_h(t_0 + (k-1)h, x) + C_1(h)h$$

для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$.

Звідси отримаємо, що

$$\begin{aligned} V_h(t_0 + kh, x + hX((k-1)h, x)) &\leq (1 - C(h)h)V_h(t_0 + (k-1)h, x) + C_1(h)h \leq \\ &\leq (1 - C(h)h)^2 V_h(t_0 + (k-2)h, x) + C_1(h)h(1 - C(h)h) + C_1(h)h \leq \dots \leq \\ &\leq (1 - C(h)h)^k V_h(t_0, x_0) + C_1(h)h \sum_{i=0}^{k-1} (1 - C(h)h)^i \leq (1 - C(h)h)^k V_h(t_0, x_0) + \frac{C_1(h)}{C(h)} \leq \\ &\leq \sup_{|x_0| < r} V_h(t_0, x_0) (1 - C(h)h)^k + \frac{C_1(h)}{C(h)}. \end{aligned}$$

Тому існує $T = T(r, t_0, h)$ таке, що при $kh \geq T$ виконується нерівність:

$$V_h(t_0 + kh, x_k^h) \leq \frac{C_1(h)}{C(h)} + 1. \quad (11)$$

З (11) в силу умови (10) випливає доведення першої частини теореми.

Доведення другої частини теореми очевидним чином отримується з першої з урахуванням рівномірності по $h \leq h_0$ співвідношення (10).

Наступна теорема стверджує існування для дисипативної системи функції Ляпунова з властивостями 1), 2) теореми 2 і є аналогом відповідної теореми з [6] для різницевих рівнянь. Припустимо, що $X(t, x)$ ліпшицева по x з константою L .

Теорема 3 . *Якщо система (2) – дисипативна в сенсі означення 2, то для неї існує в області $t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n$ невід’ємна функція Ляпунова $V_h(t, x)$, що задовольняє по x локальну умову Ліпшица і:*

1. Виконується умова

$$\inf_{t \geq t_0; |x| \geq R} V_h(t, x) \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty \quad (12)$$

2. Існує $C(h) > 0$ таке, що

$$V_h(t + h, x + hX(t, x)) - V_h(t, x) \leq -C(h)hV_h(t, x) \quad (13)$$

і $C(h)h < 2$, якщо $h \leq 2$. Причому, для $h < h_0$, де h_0 – розв’язок рівняння $\frac{1-e^{-h}}{h} = \frac{1}{2}$, сталу $C(h)$ можна взяти рівною $\frac{1}{2}$.

Якщо система (2) – рівномірно дисипативна по h , то функція Ляпунова $V(t, x)$ не залежить від h .

Доведення. Оскільки система (2) дисипативна, то існує таке $T = T(t_0, r, h)$, що для розв’язку, який виходить із $x_0^h \in U_r$, ми маємо: $\|x_k^h\| \leq R$, при $kh \geq t_0 + T$.

Роглянемо тепер наступну функцію:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi - T, & \xi \geq T; \\ 0, & 0 \leq \xi < T. \end{cases}$$

Це невід'ємна неперервна функція, визначена для $\xi \geq 0$ і $G(\xi) \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \infty$ та

$$\left| G(\xi) - G(\xi') \right| \leq \left| \xi - \xi' \right| \quad (14)$$

Визначимо $V_h(t, x)$ так:

$$V_h(t, x) = \sup_{n \geq 0; nh \leq T} \left[G(\|x(t + nh, x, t)\|) e^{nh} \right].$$

Звідки

$$G(\|x\|) \leq V_h(t, x),$$

а отже $V_h(t, x)$ задовольняє умову (12).

Тепер покажемо, що $V_h(t, x)$ ліпшіцева по змінній x . Позначимо

$$V_h^{(n)}(t, x) = G(\|x(t + nh, x, t)\|) e^{nh}.$$

Враховуючи (14), маємо:

$$\begin{aligned} V_h^{(n)}(t, x) - V_h^{(n)}(t, \acute{x}) &\leq G(\|x(t + nh, x, t)\|) e^{nh} - G(\|\tilde{x}(t + nh, \acute{x}, t)\|) e^{nh} \leq \\ &\leq e^{nh} \|x(t + nh, x, t) - \tilde{x}(t + nh, \acute{x}, t)\|. \end{aligned}$$

Оскільки розв'язки системи (2) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} x_k^h &= x + h \sum_{p=0}^{k-1} X(t + ph, x_p^h) \\ \tilde{x}_k^h &= \acute{x} + h \sum_{p=0}^{k-1} X(t + ph, \tilde{x}_p^h), \end{aligned}$$

де $x_0^h = x$, $\tilde{x}_0^h = \acute{x}$, то матимемо

$$\begin{aligned} V_h^{(n)}(t, x) - V_h^{(n)}(t, \acute{x}) &\leq e^{nh} \left[|x - \acute{x}| + h \sum_{p=0}^{k-1} |X(t + ph, x_p^h) - X(t + ph, \tilde{x}_p^h)| \right] \leq \\ &\leq e^{nh} \left[|x - \acute{x}| + hL \sum_{p=0}^{k-1} |x_p^h - \tilde{x}_p^h| \right]. \end{aligned}$$

Звідси та з [1, с. 156] отримаємо:

$$\left| V_h^{(n)}(t, x) - V_h^{(n)}(t, \acute{x}) \right| \leq |x - \acute{x}|(1 + Lh)^n e^{nh} \leq e^{T(L+1)} |x - \acute{x}|.$$

Отже,
$$\left| V_h^{(n)}(t, x) - V_h^{(n)}(t, \acute{x}) \right| \leq K|x - \acute{x}|.$$

З останньої нерівності та із врахуванням того, що різниця супремумів не перевищує супремуму різниці, впливає ліпшіцевість функції $V_h(t, x)$ по x . Покажемо виконання умови 2 теореми. Далі, якщо $h > 0$, $\acute{x} = x(t + h, x, t)$ та hm таке, що

$$V_h^{(m)}(t + h, \acute{x}) = G(\|x(t + h + mh, \acute{x}, t + h)\|) e^{mh}$$

і якщо $nh = mh + h$, то

$$V_h^{(m)}(t + h, \acute{x}) = G(\|x(t + nh, x, t)\|) e^{nh} e^{mh-nh} \leq V_h^{(n)}(t, x) e^{-h}$$

Переходячи в останній нерівності спочатку до супремуму по n ($nh \leq T$) справа, а потім до супремуму по m ($mh \leq T$) зліва, отримаємо, що

$$\frac{V_h(t + h, \acute{x}) - V_h(t, x)}{h} \leq V_h(t, x) \frac{e^{-h} - 1}{h}$$

Отже виконується умова 2 теореми з $C(h) = \frac{1-e^{-h}}{h}$. Якщо ж взяти h_0 коренем рівняння $\frac{1-e^{-h}}{h} = \frac{1}{2}$, то в силу монотонного спадання функції $\frac{1-e^{-h}}{h}$ при $h > 0$ для $h < h_0$, отримаємо нерівність

$$V_h(t + h, \acute{x}) - V_h(t, x) \leq -\frac{h}{2} V_h(t, x).$$

Друге твердження теореми очевидне.

Теорема 4 . Нехай $X(t, x)$ визначена і обмежена в області $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ так, що

$$\|X(t, x)\| \leq M,$$

M -деяка додатна константа.

Тоді, якщо в даній області існує неперервно-диференційовна по t , x невід'ємна функція Ляпунова $V(t, x)$, що задовольняє по x умову Ліпшица з константою L , а також:

$$1. \exists C > 0, \exists C_1 > 0, \text{ що } \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \forall h > 0$$

$$V(t + h, x + hX(t, x)) - V(t, x) \leq -ChV(t, x) + C_1h. \quad (15)$$

2. Виконується умова

$$\inf_{t \geq 0; |x| > R} V(t, x) \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty, \quad (16)$$

то система диференціальних рівнянь (1) дисипативна при $t \geq 0$.

Доведення. Нехай $x(t)$ – розв'язок системи (1). В силу (15) для різнищового відношення справедлива оцінка

$$\begin{aligned} \frac{V(t + h, x(t + h)) - V(t, x(t))}{h} &= \frac{V(t + h, x(t + h)) - V(t + h, x^h(t + h))}{h} + \\ &+ \frac{V(t + h, x^h(t + h)) - V(t, x(t))}{h} \leq \frac{L|x(t + h) - (x(t) + hX(t, x(t)))|}{h} - \\ &- CV(t, x(t)) + C_1, \quad \forall t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (17)$$

І, оскільки,

$$|x(t + h) - x(t) - hX(t, x(t))| \leq 2Mh,$$

то з (17) отримаємо нерівність

$$\frac{dV(t, x)}{dt} \leq -CV(t, x) + C_2, \quad C_2 = C_1 + 2LM,$$

з якої випливає оцінка

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0)e^{-C(t-t_0)} + C_1 \int_{t_0}^t e^{-C(t-s)} ds =$$

$$= \left[V(t_0, x_0) - \frac{C_1}{C} \right] e^{-C(t-t_0)} + \frac{C_1}{C}.$$

Тому існує $T = T(t_0, x_0)$, що при $t \geq T$ виконується нерівність:

$$V(t, x(t)) \leq \frac{C_1}{C} + 1.$$

Звідси та з (16) випливає доведення теореми.

Література

- [1] Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. - Под ред. Ю. А. Митропольского. К., Наук.думка, 1972.-246 с.
- [2] Карасик Г. Я. О сохранении периодического решения при переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностным //Научн. доклады в. ш. физ.-мат. науки.-1958.-№4.-с.43-46.
- [3] Скалкина М. А. О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечно-разностных уравнений. - ПММ, 1955.-Т.19-вып. 3.-с.95-99.
- [4] Ateiwi A. M. To the problem on periodic solutions of one class of systems of difference equations //Укр. мат. журн.-1997.-49, №2.-с.309-314.
- [5] Бабенко К. И. Основы численного анализа. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986.- 744 с.
- [6] Йосидзава Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений. //Математика, 9, 5 - (1965), с.95-127.