УДК 517.54

ОДНА ТЕОРЕМА ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ: Препринт 85.85
Сафонов В.М. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - 12 с.

В работе устанавливается новый критерий аналитичности функции одного комплексного переменного.

Владимир Михайлович САФОНОВ

ОДНА ТЕОРЕМА ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ

Препринт

Редактор Ю.Б. Зелинский

Подп. в печ. 02.12.85 БФ 36446 . Формат 60x84 16. Бумага тип.
Офс.печать. Усл.печ.л. 0,7 Уч.-изд.л. 0,6 Тираж 140 экз.
Заказ 45 . Цена 6 коп.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН УССР
252601, Киев, ГСП, ул. Репина,3.

Цель настоящей работы состоит в доказательстве новой теоремы о "стирании" особенностей аналитических функций. Все понятия и обозначения, используемые здесь без предварительного объяснения, в точности соответствуют принятым в работах [1,3].

Для доказательства результата потребуется следующая

Л е м м а . Пусть в прямоугольнике $Q \subset \mathbb{C}$ со сторонами, параллельными осям координат, задана непрерывная функция $f(z)$, имеющая ограниченную комплексную производную в дополнении к некоторому совершенному нульмерному множеству $\mathcal{P} \subset Q$, причем существует такая постоянная L, что для любой точки $z' \in \mathcal{P}$ и любой точки z, лежащей вместе с z' на прямой $x = const$, выполняется неравенство

$$|f(z') - f(z)| \leq L|z' - z|.$$

Тогда всюду в прямоугольнике Q функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $2L$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $|f'(z)| \leq L$ для каждой точки $z \in Q \setminus \mathcal{P}$. Далее, в силу условий леммы справедливо неравенство

$$|f(z') - f(z'')| \leq L(z' - z'')$$

для любых точек $z', z'' \in Q$, лежащих либо на прямой $x = const$, либо на отрезке прямой $y = const$, принадлежащем дополнению $Q \setminus \mathcal{P}$ (за исключением лишь, быть может, его концов).

Для доказательства леммы достаточно показать, что имеет место неравенство

$$|f(z') - f(z'')| \leq 2L|z' - z''|$$

для произвольных точек $z', z'' \in Q \setminus \mathcal{P}$. Отсюда уже будет следовать тот факт, что функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $2L$ всюду в прямоугольнике Q (в силу плотности точек $z \in Q \setminus \mathcal{P}$ в Q и непрерывности $f(z)$).

Итак, возьмем множество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, каждый из которых содержится в прямоугольнике Q и имеет, по крайней мере, одну из вершин точкой множества $Q \setminus \mathcal{P}$ и рассмотрим произвольный элемент q этого множества. Обозначим его вершину, которая принадлежит множеству

$Q \setminus \mathcal{P}$, через z_0 (если таких вершин имеется несколько, то возьмем любую из них). Вершину, которая не принадлежит сторонам прямоугольника q, содержащим точку z_0, обозначим через $\tilde{z}$. В силу симметрии обоих случаев можем считать, что верхнее основание прямоугольника q содержит точку $\tilde{z}$ и диагональ $z_0\tilde{z}$ составляет острый угол с его нижним основанием (направление отсчета угла считаем положительным). Покажем, что для точек z_0 и $\tilde{z}$ прямоугольника q выполняется неравенство

$$|f(z_0) - f(\tilde{z})| \le 2L|z_0 - \tilde{z}|,$$

и лемма тем самым будет доказана.

Назовем допустимой ломаную $\lambda = \bigcup\limits_k \ell_k$ ($\ell_k \subset q$, $k = 1, 2, \dots, m, \dots, n, \dots$), которая удовлетворяет условиям:

1) каждое звено представляет собой отрезок, лежащий либо на прямой $x = const$ (вертикальное звено), либо на прямой $y = const$ (горизонтальное звено), причем горизонтальные звенья, за исключением лишь, быть может, их концов, принадлежат дополнению $Q \setminus \mathcal{P}$;

2) за каждым горизонтальным звеном ℓ_m следует вертикальное звено ℓ_{m+1}, расположенное в верхней полуплоскости относительно прямой $y = const$, на которой лежит ℓ_m и за каждым вертикальным звеном ℓ_n следует горизонтальное звено ℓ_{n+1}, находящееся в правой полуплоскости относительно прямой $x = const$, которая содержит ℓ_n.

Здесь следует заметить, что для любых точек $z_1, z_2 \in q$, принадлежащих какой-либо допустимой ломаной λ, имеет место неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le 2L|z_1 - z_2|$$

(в силу того, что функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L вдоль прямых $x = const$ и вдоль отрезков прямых $y = const$, принадлежащих дополнению $q \setminus \mathcal{P}$ (за исключением, быть может, концов)).

Допустим теперь, что точка $\tilde{z}$ не принадлежит никакой допустимой ломаной λ, содержащей точку z_0 (в противном случае выполнялось бы неравенство

$$|f(z_0) - f(\tilde{z})| \le 2L|z_0 - \tilde{z}|,$$

и тем самым лемма была бы доказана).

Выберем новую систему координат в z - плоскости с началом в точке z_0 так, чтобы ее оси $O\zeta$ и $O\xi$ составляли с осями OX и OY соответственно углы равные $\frac{\pi}{4}$ (считаем направление отсчета углов положительным). Проведем через точку $\tilde{z}$ прямую, перпендикулярную оси $O\zeta$, и обозначим точку пересечения этой прямой с $O\zeta$ через $\tilde{\zeta}$. Каждая допустимая ломаная представляет собой график функции $\lambda(\zeta)$, удовлетворяющей условию Липшица с константой, равной 1, в новой системе координат (поскольку имеет своими звеньями отрезки, у которых угловой коэффициент равен либо $+1$, либо -1), причем если ζ - ортогональная проекция любой ее точки (исключая лишь z_0) на $O\zeta$, то $0<\zeta<\tilde{\zeta}$.

Пусть M - класс таких допустимых липшицевых ломаных. Покажем, что из любой последовательности $\{\lambda_n(\zeta)\}\subset M$ ломаных можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность, пределом которой является липшицева кривая с той же константой.

В самом деле, обозначим ортогональные проекции концов ломаных $\lambda_n(\zeta)$ на ось $O\zeta$ через ζ_n, тогда $0<\delta\le\zeta_n<\tilde{\zeta}$ (поскольку точка z_0 принадлежит области аналитичности функции $f(z)$), при этом можем считать, что последовательность $\{\zeta_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\zeta_0$, где $\zeta_0\in[0,\tilde{\zeta}]$, монотонно убывая либо монотонно возрастая.

В случае, когда $\zeta_n\searrow\zeta_0$, легко выделяется подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}(\zeta)\}\subset\{\lambda_n(\zeta)\}$, которая сходится равномерно (в силу того, что ломаные $\lambda_n(\zeta)$ являются липшицевыми) к липшицевой кривой λ^0 с константой 1 на отрезке $[0,\zeta_0]$. Поэтому рассмотрим последовательность $\zeta_n\nearrow\zeta_0$. Тогда можно извлечь на каждом отрезке $[0,\zeta_n]$ подпоследовательность $\{\lambda^{(n)}_{n_k}(\zeta)\}\subset\{\lambda_n(\zeta)\}$, сходящуюся равномерно (в силу липшицевости ломаных) к липшицевой кривой $\lambda^{(n)}$ с константой 1. Применяя диагональный процесс Кантора, строим последовательность

$$\lambda^{(1)}_1(\zeta),\ \lambda^{(2)}_2(\zeta),\ldots,\ \lambda^{(n)}_n(\zeta),\ldots$$

(ясно, что она является подпоследовательностью последовательности $\{\lambda_n(\zeta)\}$), которая будет равномерно сходиться к липшицевой кривой λ^0 с константой 1 на отрезке $[0,\zeta_0]$ в силу плотности множества $[0,\zeta_0)$ на $[0,\zeta_0]$ и липшицевости ломаных $\lambda_n(\zeta)$, причем для произвольных точек $z_1,z_2\in\lambda^0$ остается справедливым неравенство

$$\left| f(z_1) - f(z_2) \right| \le 2L \left| z_1 - z_2 \right|$$

(поскольку непрерывная функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица вдоль каждой допустимой ломаной $\lambda \in M$ с постоянной $2L$).

Теперь возьмем замыкание $\overline{M}$, являющееся компактным семейством в силу только что приведенных рассуждений и рассмотрим множество точек

$$F = \{ z \in q : \exists \lambda \in \overline{M} : z \in \lambda \} .$$

$\operatorname{Int} F \neq \emptyset$ (точка $z_0 \in q \setminus \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – нульмерно, и, следовательно, найдется такой круг d, что $d \subset F$). F – связно и $F = \overline{F}$ (в самом деле, связность следует из самого определения множества F, замкнутость вытекает из тех же рассуждений, которые применялись при доказательстве компактности семейства M). Таким образом, F – замкнутое, связное и с непустой внутренностью множество, содержащееся в прямоугольнике q. Отсюда следует, что дополнение $\mathcal{U} = CF$ – открытое множество, причем $\operatorname{int} \mathcal{U} \neq \emptyset$ (действительно, найдется такая окрестность $V(\tilde{z})$ точки $\tilde{z}$ в z - плоскости, что $V \cap q \neq \emptyset$ и $V \cap F = \emptyset$, ибо в противном случае $\tilde{z} \in F$, что противоречит предположению).

В силу выше приведенных заключений $\dim \partial F = 1$ и существует континуум $K \subset \partial F$, разделяющий $\operatorname{int} F$ и $\operatorname{int} \mathcal{U}$ [2,4].

Рассмотрим теперь континуум K. Покажем, что всякий подконтинуум $K' \subset K$, не имеющий общих точек с верхним и нижним основаниями прямоугольника q, представляет собой график монотонно возрастающей функции относительно оси абсцисс в z - плоскости. Для этого покажем сначала, что каждая прямая $x = const$, пересекающая континуум K' по непустому множеству, имеет с последним одну единственную общую точку.

Допустим противное, тогда найдется прямая $x = const$, которая имеет непустое пересечение с континуумом K' и содержит, по крайней мере, две его точки z_1 и z_2 (для определенности предположим, что z_1 лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = const$, одна из которых проходит через z_2, а другая – через нижнее основание прямоугольника q).

З а м е ч а н и е. Прежде, чем продолжить рассуждения, заметим, что если $z \in F$, то прямоугольник $\overline{\Pi}$, ограниченный верхним основанием и левой боковой стороной (стороной, на которой лежит точка z_0) прямоугольника q, а также прямыми $x = const$ и $y = const$, проходящими через z, не содержит точек множества $\mathcal{U} = CF$, ибо в противном случае точка $z' \in \mathcal{U} \cap \overline{\Pi} \neq \emptyset$ принадлежала бы $\lambda' = \lambda \cup \overline{z'z''}$, где $\lambda \in \overline{M}$, $z, z'' \in \lambda$ и $\overline{z'z''}$ – вертикальный отрезок (точки z и z'' совпадают в случае, когда z' находится на прямой $x = const$, проходящей через z), а это противоречило бы определению множества $\mathcal{U}$, поскольку $\lambda' \in \overline{M}$ (в силу понятия допустимой ломаной).

Возвращаясь к прежним рассуждениям, можем отметить, что отрезок $\overline{z_1 z_2}$ не содержит точек множества $\mathcal{U}$ (в силу выше-приведенного замечания). Кроме того, $\overline{z_1 z_2} \cap int\, F = \emptyset$. В самом деле, если предположить, что найдется точка $z' \in \overline{z_1 z_2}$, которая содержится в $int\, F$, то найдется и круг d с серединой в точке z' такой, что $d \subset int\, F$. Возьмем диаметр δ круга d, перпендикулярный отрезку $\overline{z_1 z_2}$. Тогда ясно, что все точки, принадлежащие как полосе, образованной прямыми $x = const$, которые проходят через концы диаметра δ и являются параллельными отрезку $\overline{z_1 z_2}$, так и полосе, ограниченной прямыми $y = const$, одна из которых содержит диаметр δ, а другая – верхнее основание прямоугольника q, находятся в $int\, F$ (в силу того же замечания). Поскольку $\overline{z_1 z_2} \subset int\, q$, то $z_2 \in int\, F$, что противоречит выбору точки z_2.

Таким образом, $\overline{z_1 z_2} \subset \partial F$, причем можем считать, что $\overline{z_1 z_2} \subset q \setminus \mathcal{P}$ (в силу нульмерности множества $\mathcal{P}$).

Возьмем, далее, прямоугольник Π такой, что $\partial \Pi \supset \{z_1, z_2\}$, $\overline{\Pi} \subset q \setminus \mathcal{P}$ и z_1, z_2 не являются его вершинами. Пусть $\overline{\Pi} = \overline{\Pi}_1 \cup \overline{\Pi}_2$, где $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ – прямоугольники такие, что $\overline{\Pi}_1 \cap \overline{\Pi}_2 = \overline{z_1 z_2}$ и $\overline{\Pi}_1$ расположен в полосе, образованной прямыми $x = const$, проходящими через отрезок $\overline{z_1 z_2}$ и точку z_0. Тогда $\overline{\Pi}_1 \cap \mathcal{U} = \emptyset$ (в силу приведенного выше замечания). Поскольку $\overline{z_1 z_2} \subset \partial F$, то $\overline{\Pi}_2 \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Поэтому если $z' \in \overline{\Pi}_2 \cap \mathcal{U}$, то $z' \in \lambda' = \lambda \cup \overline{z'z''}$, где $\lambda \in \overline{M}$, $z'' \in \lambda$, $z'' \in \overline{z_1 z_2}$ и $\overline{z'z''}$ – горизонтальный отрезок, а это противоречит определению множества $\mathcal{U}$, так как $\lambda' \in \overline{M}$ (в силу понятия допустимой ломаной).

Итак, континуум K' представляет собой график однозначной функции относительно оси абсцисс в z – плоскости.

Покажем теперь, что если z_1 и z_2 – какие-либо точки пересечения прямой $y=const$ с континуумом K', то $\overline{z_1 z_2} \subset \partial F$.

В самом деле, пусть z_1 и z_2 принадлежат пересечению прямой $y=const$ с континуумом K'. Простоты ради, будем считать, что z_1 находится в полосе, образованной прямыми $x=const$, проходящими через точки z_0 и z_2. Тогда отрезок $\overline{z_1 z_2}$ точек множества $\mathcal{U}$ не содержит (в силу ранее приведенного замечания). Кроме того, $\overline{z_1 z_2} \cap int F = \emptyset$. В противном случае найдется круг d с серединой в точке $z' \in \overline{z_1 z_2}$ такой, что $d \subset int F$. Возьмем точку $z'' \in d$, лежащую в полосе, ограниченной прямыми $y=const$, проходящими через отрезок $\overline{z_1 z_2}$ и нижнее основание прямоугольника q. Поскольку $z'' \in int F$, то $z_1 \in int F$ (в силу вышеприведенного замечания и того, что $K' \subset int\, q$), что противоречит выбору точки z_1.

Таким образом, в силу замечания можно сделать следующий вывод относительно континуума K'. K' есть график некоторой монотонно возрастающей функции относительно оси абсцисс в z – плоскости.

Теперь рассмотрим квадрат q' с центром в точке $z' \in K \cap int\, q$ такой, что $q' \subset q \setminus \mathcal{P}$ (это возможно в силу нульмерности множества $\mathcal{P}$). Далее, $q' \cap K = K' \subset int\, q$. Проекция континуума K' на ось ординат в z – плоскости есть некоторый отрезок $[a, b]$. Поскольку у монотонной функции интервалов постоянства имеется не более чем счетное множество, то проекция N прямых $y=const$, пересекающих континуум K' более чем в одной точке, на ось ординат представляет собой множество первой категории на отрезке $[a, b]$. Тогда дополнение CN есть множество всюду второй категории на $[a, b]$ и, следовательно, оно является плотным [см. 1, стр. 193-200].

Возьмем точку $c \in CN$ такую, что $c \notin \{a, b\}$; ей соответствует при проекции единственная точка $z'' \in K'$, то есть прямая $y=const$, проходящая через точку c, пересекает континуум K' в единственной точке – z''. Отсюда следует, что найдется точка $z''' \in q' \cap \mathcal{U}$, лежащая на прямой $y=const$, проходящей через точку z'', в полосе, образованной прямыми $x=const$, которые содержат точки z'' и $\tilde{z}$ (в силу замечания и того, что $K' \subset \partial F \cap int\, q$). Поэтому $z''' \in \lambda' = \lambda \cup \overline{z'' z'''}$, где $\lambda \in \overline{M}$, $\lambda \ni z''$ и $\overline{z'' z'''}$ – горизонтальный отрезок в q', а это противоречит тому, что $z''' \in \mathcal{U}$, поскольку $\lambda' \in \overline{M}$ (в силу понятия допустимой ломаной). Этим доказательство леммы исчерпывается.

Теперь сформулируем и докажем основной результат.

Т е о р е м а. Пусть непрерывная в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ является аналитической вне произвольного совершенного замкнутого нульмерного множества $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ плоской Лебеговой меры нуль.

Если в каждой точке $z \in \mathcal{P}$ существует конечная частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$, то $f(z)$ является аналитической всюду в области $\mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагая теорему неверной, находим совершенное множество всех точек $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$, ни в одной из которых функция $f(z)$ не является аналитической.

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество точек $z = x + iy \in \mathcal{P}_0$, для которых одновременно выполнены неравенства

$$|U(x, y+h) - U(x,y)| \le n|h|,$$

$$|V(x, y+h) - V(x,y)| \le n|h|$$

при всех $|h| \le \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Очевидно, что в наших условиях

$$\mathcal{P}_0 = \bigcup_n \mathcal{P}_n .$$

Из условий теоремы следует, далее, что функция $f(z) = u + iv$ непрерывна вдоль прямой $x = const$; поэтому множество $\mathcal{P}_n$ замкнуто в $\mathcal{D}$, а следовательно, оно замкнуто и в $\mathcal{P}_0$ $(n = 1,2,3,\dots)$.

Поскольку совершенное множество $\mathcal{P}_0$ – всегда второй категории в себе, то найдется круг $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, в котором одно из множеств $\mathcal{P}_n$ всюду плотно на $\mathcal{P}_0$; но эти множества замкнуты (в $\mathcal{P}_0$), поэтому в круге $\mathcal{D}'$ $\mathcal{P}_0$ полностью принадлежит некоторому множеству $\mathcal{P}_n$. Будем считать, что диаметр круга $\mathcal{D}'$ меньше $\frac{1}{n}$. Тогда в силу определения множества $\mathcal{P}_n$ выполняется неравенство

$$|f(z') - f(z)| \le L|z' - z|$$

в круге $\mathcal{D}'$ для любой точки $z' \in \mathcal{P}_0$ и любой точки z, лежащей вместе с z' на прямой $x = const$, причем $L = 2n$.

Простоты ради, обозначим порцию $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{D}'$ через $\mathcal{P}$ и все дальнейшие рассуждения будем проводить для круга $\mathcal{D}'$.

Рассмотрим область $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}'$ такую, что $\mathcal{O} \cap \mathcal{P} \ne \emptyset$, $\partial\mathcal{O} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ и граница области $\partial\mathcal{O}$ – замкнутая жорданова кривая. Возьмем такое конечное покрытие границы $\partial\mathcal{O}$: $V = \bigcup_{\beta=0}^{\beta_0} V_\beta$, где V_β – круг с центром в точке $z_\beta \in \partial\mathcal{O}$, $V_\beta \subset \mathcal{D}' \setminus \mathcal{P}$ $(\beta = 0, 1, \dots, \beta_0)$, что справедливо неравенство

$$|f(z') - f(z'')| \le L_\beta |z' - z''|$$

для произвольных точек $z', z'' \in V_\beta$ (это можно осуществить, поскольку функция $f(z)$ в области аналитичности $\mathcal{D}' \setminus \mathcal{P}$ локально удовлетворяет условию Липшица).

Далее будем полагать, что

$$L' = max\{L, L_0, L_1, L_2, \dots, L_{\beta_0}\}.$$

Очевидно, что для любых точек $z', z'' \in \partial\sigma$ имеет место неравенство

$$|f(z') - f(z'')| \le L' |z' - z''|.$$

Теперь утверждаем, что $|f'(z)| \le L'$ для каждой точки $z \in \sigma \setminus \mathcal{P}$ (здесь под $f'(z)$ понимается комплексная производная функции).

В самом деле, предполагая противное, находим точку $z_0 \in \sigma \setminus \mathcal{P}$ такую, что $|f'(z_0)| > L'$ (пусть $f'(z_0) = Ae^{i\alpha}$, где $A > L'$).

Рассмотрим функцию $\mathcal{F}(z) = f(z) - Ae^{i\alpha} \cdot z$. Тогда ясно, что для каждой точки $z \in \sigma \cap \mathcal{P}$ значение частной производной $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$, изображаемое точкой на плоскости производных чисел ζ, содержится в замкнутом угле раствора меньше π, вершиной которого является точка $\zeta = 0$, а биссектрисой – луч, выходящий из начало координат $\zeta = 0$ и содержащий точку $Ae^{i\alpha}$.

Возьмем, далее, прямые $x = const$, проходящие через точки $z \in \sigma \cap \mathcal{P}$. Образом каждого из двух отрезков, имеющих в качестве общей только точку z (где $z \in \mathcal{P}$) и лежащих на прямой $x = const$ в области σ, при отображении $\mathcal{F}$ есть некоторая непрерывная кривая, выходящая из точки $w = \mathcal{F}(z)$ и имеющая (в силу того, что существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta \mathcal{F}}{i\Delta y} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$, а следовательно – предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} Arg \frac{\Delta \mathcal{F}}{i\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} Arg\, \Delta\mathcal{F} - \lim\limits_{\Delta y \to 0} Arg\,(i\Delta y)$) касательную полупрямую в ней.

При этом, если T – луч на плоскости ζ, выходящий из начала $\zeta = 0$ и такой, что $Arg\, T$ равен пределу $\lim\limits_{\Delta y \to 0} Arg \frac{\Delta \mathcal{F}}{i\Delta y}$, то $Arg\, T$ есть угол поворота касательной к отрезку в точке z при переходе к его образу с начальной точкой $\mathcal{F}(z)$. Поэтому в силу определения касательной полупрямой в точке $\mathcal{F}(z)$ образы некоторых начальных частей отрезков, имеющих одну общую точку z $(z \in \mathcal{P})$ и лежащих на прямой $x = const$ в области σ, будут расположены в паре вертикальных углов раствора меньше π с биссектрисами, параллельными прямой ℓ w– плоскости, для которой $\arg l = \frac{\pi}{2} \pm \arg l_0$, где l_0 проходит через начало $\zeta = 0$ и точку $Ae^{i\alpha}$ (считаем угол между вертикалями при переходе от z - плоскости к w - плоскости равным нулю) [см. 1, стр. 31-35]. Далее следует заметить, что $\mathcal{F}(z)$ осуществляет внутреннее отображение области $\mathcal{O} \setminus \mathcal{P}$, поскольку $\mathcal{F}(z)$ - аналитическая функция в дополнении $C\mathcal{P}$.

Таким образом , выполняются все условия теоремы о продолжении внутренних отображений [3], которая утверждает, что в таком случае отображение $w = \mathcal{F}(z)$ является внутренним в области $\mathcal{O}$.

Покажем, теперь, что функция $w = \mathcal{F}(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение области $\mathcal{O}$, а это будет противоречить тому, что $\mathcal{F}'(z_0) = 0$, где $z_0 \in \mathcal{O}$. Для этого достаточно показать, что выполняется неравенство

$$|\mathcal{F}(z') - \mathcal{F}(z'')| > 0$$

для любых точек $z', z'' \in \partial\mathcal{O}$, где $z' \neq z''$.

Действительно, пусть z', z'' - произвольные и различные между собой точки границы области $\partial\mathcal{O}$. Тогда

$$|\mathcal{F}(z') - \mathcal{F}(z'')| = |f(z') - Ae^{i\alpha}z' - f(z'') + Ae^{i\alpha}z''| =$$

$$= |(Ae^{i\alpha}z'' - Ae^{i\alpha}z') - (f(z'') - f(z'))| \geq$$

$$\geq A|z' - z''| - L'|z' - z''| = (A - L')|z' - z''| = B .$$

Поскольку $|z' - z''| > 0$ и $(A - L') = \tilde{L} > 0$ (так как $z' \neq z''$ и $A > L'$), то очевидно $B > 0$. Отсюда следует, что отображение $\mathcal{F}(z)$ является гомеоморфизмом на границе области $\partial\mathcal{O}$. Поэтому $\mathcal{F}(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение замкнутой области $\bar{\mathcal{O}}$ и, следовательно, $|f'(z)| \leq L'$ для всех точек $z \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{P}$.

Возьмем теперь прямоугольник $\bar{Q} \subset \mathcal{O}$ такой, что $Q \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$. Тогда находимся в условиях доказанной выше леммы, применение которой позволяет считать, что функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица всюду в прямоугольнике Q . В силу теоремы Лумана-Меньшова [см. 1, стр. 11-12] функция $f(z)$ является аналитической всюду внутри Q (поскольку $f(z)$ аналитична в $Q \setminus \mathcal{P}$, где $\mathrm{Mes}\, \mathcal{P} = 0$). Это противоречит предположению о том, что ни в одной из точек множества $\mathcal{P}$ функция $f(z)$ не является аналитической.

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трохимчук Ю.Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. - М.: Физматгиз , 1963. - 212 с.
2. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. - М.: Гостехиздат, 1951.
3. Сафонов В.М. Теорема о продолжении внутренних отображений.-В кн.: Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 106-131.
4. Куратовский К. Топология, т.II - М.: Мир, 1969. - 624 с.