

УДК 681.513.5

О.П. ЛОБОК, кандидат фізико-математичних наук

Б.М. ГОНЧАРЕНКО, доктор технічних наук

Н.М. САВІЦЬКА, асистент

Національний університет харчових технологій

МІНІМАКСНЕ УПРАВЛІННЯ ЛІНІЙНИМИ БАГАТОВИМІРНИМИ ОБ'ЄКТАМИ ЗІ СТАЦІОНАРНИМИ ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ

В роботі розглядається задача гарантованого, тобто мінімаксного управління об'єктами керування, які описуються системами лінійних диференціальних рівнянь з інтервальними зовнішніми збуреннями та збуреннями в початковий момент часу, причому припускається, що зовнішні збурення є стаціонарними. Інтервальні збурення пропонується апроксимувати еліпсоїдом мінімального об'єму, в результаті чого початкова задача мінімаксного управління апроксимується субоптимальною задачею мінімаксного управління з еліпсоїдальними збуреннями, для розв'язання якої можна застосувати відомі підходи.

Ключові слова: лінійні системи, мінімаксний регулятор, оптимальне керування, інтервальні збурення, еліпсоїд допустимих збурень, функція Лагранжа.

Вступ. Реальні об'єкти управління часто-густо функціонують в умовах певної невизначеності. Ця невизначеність може бути різної природи, наприклад, стохастична – з відомими чи невідомими статистичними характеристиками, детермінована – з еліптичною чи інтервальною областю допустимих збурень, комбінована, тощо. Побудова багатовимірних регуляторів для таких неповністю визначених об'єктів взагалі є досить важкою задачею.

В роботах [1-3] розглядався клас задач мінімаксного управління системами зі збуреннями, що належать деякій множині у вигляді багатовимірного

гіпереліпсоїду. Якщо ж збурення не належать гіпереліпсоподібній множині, то конструктивні результати одержати досить важко. На практиці збурення, відхилення або неточності часто задаються у вигляді певних інтервалів або в у вигляді n -вимірних паралелепіпедів, які будемо називати інтервальними областями невизначеності. Тому, щоб одержати конструктивні результати, необхідно ці інтервальні обмеження апроксимувати зверху деякими гіпереліпсоїдами. Звичайно, що при такій апроксимації збільшується область допустимих збурень і отже, оптимальне мінімаксне управління буде апроксимоване субоптимальним управлінням. Основною задачею при цьому є побудова багатовимірних еліпсоїдів мінімального об'єму, які апроксимують інтервальні області невизначеності. В даній роботі будується еліпсоїд мінімального об'єму, який охоплює інтервальні збурення в початковий момент часу та стаціонарні збурення, що діють на об'єкт управління в процесі його функціонування. Одержаний еліпсоїд допустимих збурень дає можливість будувати мінімаксні регулятори, які забезпечують певну якість перехідних процесів за найбільш несприятливих збурень, що діють на об'єкт управління.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо об'єкт управління, який описується наступною лінеаризованою системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)f, & t_0 < t \leq T, \\ x(t_0) = Lx^0, \end{cases} \quad (1)$$

де $x(t) \in R^n$ – вектор стану об'єкта в момент часу t , $u(t) \in R^m$ – вектор керувальних дій, $f \in R^l$ – вектор зовнішніх впливів (або збурень), $x^0 \in R^r$ – вектор стану об'єкта в початковий момент часу t_0 , $A(t) \in R^{n \times n}$, $B(t) \in R^{n \times m}$, $K(t) \in R^{n \times l}$, $L \in R^{n \times r}$ – відомі матриці; R^n ($R^{n \times n}$) – n ($n \times n$) - вимірний евклідов простір векторів (матриць) відповідної розмірності.

Припустимо, що вектор зовнішніх збурень f та вектор початкового наближення x^0 є невідомими векторами, елементи яких задовольняють інтервальним обмеженням виду

$$\begin{cases} f \in \Omega_f = f : f = f_1, f_2, \dots, f_l^T, a_i \leq f_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, l, \\ x^0 \in \Omega_{x^0} = x^0 : x^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0^T, c_i \leq x_i^0 \leq d_i, i = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \quad (2)$$

де a_i, b_i, c_i, d_i – відомі граничні значення збурюючих чинників.

Нехай спостереження за компонентами вектора стану $x(t)$ описуються рівнянням

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (3)$$

де $y(t) \in R^s$ – вектор результатів вимірів, $C(t) \in R^{s \times n}$ – задана матриця спостережень.

Розглянемо інтегрально-квадратичний функціонал виду

$$J(u) = \int_0^T x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)D(t)u(t) dt + x^T(T)P_T x(T), \quad (4)$$

де $P(t) = P^T(t) \geq 0$, $D(t) = D^T(t) > 0$, $P_T = P_T^T \geq 0$ – задані вагові матриці.

Задача полягає в тому, щоб знайти управління $u(t)$ у вигляді

$$u(t) = R(t)y(t), \quad (5)$$

тобто у вигляді регулятора від спостережуваних координат $y(t)$, яке мінімізує наступний критерій

$$I(u) = \sup_{f \in \Omega_f, x^0 \in \Omega_{x^0}} J(u). \quad (6)$$

Управління $u^0(t)$, яке задовольняє умові

$$I(u^0) = \inf_u I(u) = \inf_u \sup_{f \in \Omega_f, x^0 \in \Omega_{x^0}} J(u) \quad (7)$$

будемо називати оптимальним мінімаксним управлінням.

В такій постановці задачі з інтервальними обмеженнями (2) одержати конструктивні результати досить важко. Тому інтервальні області допустимих збурень Ω_f та Ω_{x^0} апроксимуємо одним еліпсоїдом мінімального об'єму. Для цього спочатку розглянемо $(l+r)$ -вимірний паралелепіпед збурень виду

$$\Omega_\eta = \eta: \eta = (f, x^0); f \in \Omega_f, x^0 \in \Omega_{x^0}; \alpha_i \leq \eta_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, l+r, \quad (8)$$

в якому

$$\alpha_i = \begin{cases} a_i, & 1 \leq i \leq l, \\ c_i, & l+1 \leq i \leq l+r, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} b_i, & 1 \leq i \leq l, \\ d_i, & l+1 \leq i \leq l+r, \end{cases}$$

і нагадаємо, що довільний еліпсоїд може бути описаний рівнянням

$$(\eta - \eta_0)^T H (\eta - \eta_0) = 1, \quad (9)$$

де η_0 – центр еліпсоїда, а H – симетрична додатно визначена матриця, яка визначає орієнтацію та розмір еліпсоїда.

Наша задача буде полягати в тому, щоб знайти матрицю H та вектор η_0 , при яких еліпсоїд (9) апроксимує паралелепіпед (8), причому буде мати мінімальний об'єм.

Враховуючи, що осі паралелепіпеда (8) паралельні координатним осям, неважко прийти до висновку, що центр шуканого еліпсоїда визначається за формулою

$$\eta_{0i} = \frac{1}{2}(\alpha_i + \beta_i), i = 1, 2, \dots, l+r, \quad (10)$$

а матриця H повинна бути діагональною, тобто $H = \text{diag } h_1, h_2, \dots, h_{l+r}$.

Приймаючи це до уваги, а також те, що вершини паралелепіпеда (8) повинні знаходитись на поверхні шуканого еліпсоїда, з (9) можна одержати

$$\sum_{i=1}^{l+r} \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \right)^2 \cdot h_i = 1. \quad (11)$$

Оскільки об'єм еліпсоїда (9) з діагональною матрицею H визначається за формулою

$$V_{l+r} = C_{l+r} \prod_{i=1}^{l+r} h_i^{-\frac{1}{2}},$$

де $C_{l+r} = \pi^{(l+r)/2} / \Gamma((l+r)/2 + 1)$ – константа, яка залежить лише від розмірності простору $(l+r)$ і не залежить від величин h_1, h_2, \dots, h_{l+r} , то задачу пошуку еліпсоїда мінімального об'єму формалізовано можна представити як оптимізаційну задачу

$$C_{l+r}^{-2} V_{l+r}^2 = \prod_{i=1}^{l+r} h_i^{-1} \rightarrow \min_{h_i}$$

з обмеженням (11).

Для розв'язання цієї задачі використаємо метод множників Лагранжа, у відповідності до якого будемо функцію Лагранжа вигляду

$$L(h_1, h_2, \dots, h_{l+r}, \lambda) = \prod_{i=1}^{l+r} h_i^{-1} - \lambda \left[\sum_{i=1}^{l+r} \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \right)^2 \cdot h_i - 1 \right], \quad (12)$$

де λ – множник Лагранжа.

Оптимальні параметри h_1, h_2, \dots, h_{l+r} та множник λ визначаються з умови мінімізації функції Лагранжа (12)

$$L(h_1, h_2, \dots, h_{l+r}, \lambda) \rightarrow \min_{h_i, \lambda}. \quad (13)$$

Використаємо для розв'язання задачі (13) необхідну умову екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial L(h_1, h_2, \dots, h_{l+r}, \lambda)}{\partial h_j} = -h_j^{-2} \prod_{\substack{i=1+r \\ i \neq j}}^{l+r} h_i^{-1} - \lambda \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} \right)^2 = 0, \\ \frac{\partial L(h_1, h_2, \dots, h_{l+r}, \lambda)}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^{l+r} \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} \right)^2 \cdot h_i = 0. \end{cases} \quad (14)$$

З першого рівняння системи (14) визначимо множник Лагранжа

$$\lambda = -h_j^{-2} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l+r} h_i^{-1} \left(\frac{2}{\beta_j - \alpha_j} \right)^2 = -h_j^{-1} \prod_{i=1}^{l+r} h_i^{-1} \left(\frac{2}{\beta_j - \alpha_j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, l+r,$$

використовуючи який, з системи (14) можна одержати наступне співвідношення

$$h_i \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \right)^2 = h_j \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} \right)^2 \text{ для всіх індексів } i, j = 1, 2, \dots, l + r. \quad (15)$$

Тоді, приймаючи до уваги вираз (15), з рівності (11) одержимо

$$\sum_{i=1}^{l+r} \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \right)^2 \cdot h_i = (l + r) \cdot h_j \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} \right)^2 = 1,$$

звідки

$$h_i = \frac{4}{l + r} (\beta_i - \alpha_i)^{-2}, \quad i = 1, 2, \dots, l + r. \quad (16)$$

Неважко показати, що оптимальні параметри (16) задовольняють також достатнім умовам мінімізації функції Лагранжа (13), де $(l + r)$ – розмірність простору зовнішніх збурень.

Таким чином, оптимальний еліпсоїд мінімального об'єму, який апроксимує паралелепіпед збурень (8), визначається співвідношеннями (9), (10), (16).

Повернемось тепер безпосередньо до задачі побудови мінімаксного регулятора. Для еліпсоїда мінімального об'єму введемо позначення

$$S_\eta = \eta: \eta \in R^{l+r}, \quad (\eta - \eta_0)^T H (\eta - \eta_0) \leq 1, \quad (17)$$

де $\eta_0 = \eta_{01}, \eta_{02}, \dots, \eta_{0l+r}^T$, $H = \text{diag } h_1, h_2, \dots, h_{l+r}$, а величини η_{0i} та h_i обчислюються за формулами (10) та (16).

Тоді початковий критерій (6) можна апроксимувати функціоналом

$$I_S(u) \triangleq \sup_{\eta \in S_\eta} J(u) \geq \sup_{f \in \Omega_f, x^0 \in \Omega_{x^0}} J(u) = I(u). \quad (18)$$

Для розв'язання задачі побудови субоптимального мінімаксного управління з критерієм $I_S(u)$ спочатку перетворимо функціонал $J(u)$. Для цього, використовуючи співвідношення (3) та (5), перетворимо спочатку систему (1) до наступної

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t) + B(t)R(t)C(t) x(t) + K(t)f, \\ x(t_0) = Lx^0, \end{cases} \quad t_0 < t \leq T, \quad (19)$$

і запишемо розв'язок цієї системи у вигляді

$$x(t) = G(t, t_0)Lx^0 + \int_{t_0}^t G(t, \tau)K(\tau)d\tau \cdot f, \quad (20)$$

де $G(t, \tau)$ – фундаментальна матриця системи (19), яка є розв'язком матричного рівняння

$$\begin{cases} \frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t} = A(t) + B(t)R(t)C(t) G(t, \tau), \\ G(\tau, \tau) = E, \end{cases}$$

в якому E – одинична матриця.

Приймаючи до уваги формули (3), (5), (20), функціонал $J(u)$ можна представити у вигляді

$$J(u) = \eta^T F \eta,$$

де

$$F = F(R) = \int_{t_0}^T W^T(t) P(t) + C^T(t)R^T(t)D(t)R(t)C(t) W(t)dt + W^T(T)P_T W(T),$$

а матриця $W(t) \in R^{n \times (l+r)}$ задовольняє рівнянню

$$\begin{cases} \frac{dW(t)}{dt} = A(t) + B(t)R(t)C(t) W(t) + 0 \vdots K(t), \\ W(t_0) = L \vdots 0. \end{cases}$$

Якщо інтервальна область допустимих збурень (8) центрована, тобто $\alpha_i = -\beta_i$, то $\eta_0 = 0$ і отже, функціонал $I_S(u)$ можна перетворити так

$$I_S(u) = \sup_{\eta \in S_\eta} J(u) = \sup_{\eta^T H \eta \leq 1} \eta^T F \eta = \lambda_{\max}(FH^{-1}),$$

де $H = (l+r)^{-1} \cdot \text{diag } \beta_1^{-2}, \beta_2^{-2}, \dots, \beta_{l+r}^{-2}$, $\lambda_{\max}(FH^{-1})$ – максимальне власне значення матриці FH^{-1} .

Таким чином, задача синтезу субоптимального мінімаксного управління зводиться до наступної оптимізаційної задачі

$$I_S(u) = I_S(R) = \lambda_{\max}(F(R)H^{-1}) \rightarrow \min_R. \quad (21)$$

Якщо матриця зворотного зв'язку R шукається в класі постійних матриць, то задача (21) відноситься до класу задач нелінійного програмування. Якщо ж елементи матриці R залежать від часу t , то задача (21) є задачею варіаційного числення. Останню задачу взагалі не можна віднести до простих задач, але в даному випадку вдається позбутись операції *supremum*, що суттєво спрощує розв'язання вихідної задачі синтезу мінімаксного управління.

Висновки: В даній роботі пропонується оптимальна апроксимація інтервальної області допустимих збурень еліпсоїдом мінімального об'єму. В результаті такої апроксимації початкова задача оптимального мінімаксного управління зведена до значно простішої задачі субоптимального мінімаксного управління зі збуреннями, що належать еліпсоїдальній множині. Остання задача може бути розв'язана числовими методами нелінійного програмування або методами варіаційного числення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов/Ф.Л. Черноушко. –М.:Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры,1988.– 320с.
2. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации/В.М. Кунцевич. –К.: Наук. думка, 2006. – 264 с.
3. Лобок О.П. Аналітичне моделювання динаміки температурного режиму камери хлібопекарської печі як багатовимірного об'єкта керування/О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, А.М.Слезенко; –К.: НУХТ, Наук. Праці, №47, 2013. 145 –149 с.

4. Конструктивные методы оптимизации. ч. 4. Выпуклые задачи/Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова, В.М. Ракецкий.–Мн.:Изд-во "Университетское",1987.–223с.

А.П. ЛОБОК, кандидат физико-математических наук

Б.Н. ГОНЧАРЕНКО, доктор технических наук

Н.М. САВИЦКАЯ, ассистент

Национальный университет пищевых технологий

МИНИМАКСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ МНОГОМЕРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ СО СТАЦИОНАРНЫМИ ВНЕШНИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В работе рассматривается задача гарантированного, т.е. минимаксного управления объектами управления, которые описываются системами линейных дифференциальных уравнений с интервальными внешними возмущениями и возмущениями в начальный момент времени, причем предполагается, что внешние возмущения являются стационарными. Интервальные возмущения предлагается аппроксимировать эллипсоидом минимального объема, в результате чего исходная задача минимаксного управления аппроксимируется субоптимальной задачей минимаксного управления с эллипсоидальными возмущениями, для решения которой можно использовать известные подходы.

Ключевые слова: линейные системы, минимаксный регулятор, оптимальное управление, интервальные возмущения, эллипсоид допустимых возмущений, функция Лагранжа.

O.P. LOBOK, PhD

B.M. GONCHARENKO, PhD

N.M. SAVISCA, assistant

National University of Food Technologies

MINIMAX CONTROL LINEAR MULTIDIMENSIONAL OBJECT WITH A STATIONARY EXTERNAL PERTURBATION

This paper considers the problem of guaranteed i.e. minimax facility management control systems, described by linear differential equations with interval external disturbances and perturbations in the initial time and assume that the external perturbation is stationary. Interval perturbation proposed approximate minimum volume ellipsoid, causing the initial problem minimax control problem is approximated suboptimal minimax control with ellipsoidal perturbations, for which the solution can apply known approaches.

Keywords: linear systems, minimax control, optimal control, interval perturbation, ellipsoid allowable perturbation, Lagrangian function.

Одержана редколлегією 14.02.2013 р.