НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

Харчова промисловість

14

КИЇВ НУХТ 2013

УДК 681.513.3

О.П. ЛОБОК,
Б.М. ГОНЧАРЕНКО,
І.В. СТРУНІН
Національний університет харчових технологій

ВПЛИВ СТОХАСТИЧНИХ ЗБУРЕНЬ НА РЕЗУЛЬТАТИ АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

Вирази знайдених при аналітичному конструюванні оптимальних керувань, які мінімізують інтегральний критерій якості функціонування системи, залежать від випадкових збурень, в умовах яких проходить функціонування, а форма керувань, як і вигляд інтегрального критерію якості функціонування змінюються від цих умов. Це дозволило дослідити вплив вказаних збурень та отримати відповідні їм вирази керувань і критеріїв, а також намітити шлях до відповідного стохастичного диференціального матричного рівняння і до його розв'язку, щоб отримати вектор узагальненого стану багатовимірного об'єкта.

Ключові слова: синтез керування, збурення, ректифікаційна колона, рівняння стану, оптимальне керування, критерій якості, динамічне програмування, рівняння Белмана, рівняння Ріккаті.

Стохастичні багатовимірні об'єкти автоматичного керування часто бувають під впливом випадкових як зовнішніх, так і внутрішніх збурень. Внутрішні збурення можуть бути пов'язані, зокрема, з неповними знаннями про об'єкт керування, з неточним описом цього об'єкта або з неточними вимірюваннями деяких його технологічнихпараметрів. Тому часто об'єкти, однакові за структурою, можуть функціонувати по-різному в залежності від умов, що визначаються серед іншого і збуреннями об'єктів.

Аналітичне конструювання оптимального керування для багатовимірного об'єкта керування, наприклад, ректифікаційної колони БРУ, який знаходиться під впливом зовнішніх, що мають адитивний характер і внутрішніх у вигляді мультиплікативних випадкових збурень здійснене у [1], де пропонується алгоритм (шлях і послідовність) такого конструювання.

Автори відмічають, що об'єкти керування під дією випадкових збурень описуються зазвичай системою стохастичних диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{cases} dx(t) = \left(A(t)dt + \sum_{i=1}^{k} \Theta_i(t)dw_i(t) \right) x(t) + \\ + \left(B(t)dt + \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(t)dw_i(t) \right) u(t) + \sum_{i=1}^{k} h_i(t)dw_i(t), \\ t_0 < t \le T, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

де $x(t)$ — n-вимірний вектор стану, $u(t)$ — m-вимірний вектор керування, $A(t)$, $\Theta_i(t)$, $B(t)$, $\Psi_i(t)$ — задані матриці розмірностей $n \times n$ та $n \times m$, відповідно, вектору стану, вектору мультиплікативних збурень, вектору керувань та вектору адитивних збурень, $h_i(t)$ — відомий вектор розмірності n, $w_i(t)$ — скалярні випадкові вінеровські процеси, що описують зовнішні (адитивні) та внутрішні (мультиплікативні) збурення об'єкту керування. Щодо цих збурень передбачається, що математичне сподівання цих збурень $M(w_i(t)) = 0$, а коваріація $M(w_i(t)w_j(\tau)) = g_{ij}(t)\delta(t-\tau)$, $i, j = 1, 2, ..., k$, де $\delta(t-\tau)$ — δ-функція Дірака, а функції $g_{ij}(t)$ утворюють симетричну позитивно визначену матрицю $G(t) = \{g_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{k}$. Початковий стан системи x_0 — гаусівский випадковий n-вимірний вектор, причому $M(x_0^T) = m_0$, $M(x_0 x_0^T) = Q_0$, де m_0 — заданий n- вимірний вектор математичних сподівань, Q_0 — відома симетрична позитивно визначена коваріаційна матриця розмірності $k \times k$ вектора x_0, "T" — операція транспонування.

При цьому критерій якості функціонування системи (1) формулюється звичайно у вигляді

$$J(u) = M\left\{\int_{t_0}^{T}\left(x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)D(t)u(t)\right)dt + x^T(T)Qx(T)\right\}, \tag{2}$$

де $P(t), D(t), Q$ — задані симетричні позитивно визначені вагові матриці відповідних розмірностей.

Оптимальне керування, яке мінімізує функціонал (2) на розв'язках системи (1), автори знайшли методом динамічного програмування, відповідно до якого була введена у розгляд функція Белмана [2] виду:

$$V(x,t) = \min_{u(\tau),\ t\le\tau\le T}\left\{M_w\left[\int_{t}^{T}\left(x^T(\tau)P(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)D(\tau)u(\tau)\right)d\tau + x^T(T)Qx(T)\right]\Bigg|_{x(t)=x}\right\} \tag{3}$$

А саме рівняння Белмана було представлене в наступному вигляді

$$\min_u\left\{L_u V(x,t) + x^T P(t)x + u^T(t)D(t)u(t)\right\} = 0, \tag{4}$$

з початковою умовою $V(x,T) = x^T Qx$, де L_u — диференціальний оператор марківського процесу, який є розв'язком рівняннь (1) і тому одночасно станом керованого об'єкта. Цей оператор має вигляд:

$$L_u = \frac{\partial}{\partial t} + \left(A(t)x + B(t)u(t), \Delta_x\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(\Theta_i(t)x + \Psi_i(t)u(t) + h_i(t), \Delta_x\right)^2, \tag{5}$$

де $\Delta_x = \dfrac{\partial}{\partial x} = \left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right]^T$ — оператор-градієнт.

Шукане оптимальне керування задовольняє рівняння Белмана (4) відносно змінної керування $U(t)$, яке справедливе лише для оптимального керування $U^{\text{опт}}(t)$.

Допоміжними перетвореннями та підстановками автори [1] звели рівняння Белмана (4) до вигляду:

$$\min_u\{F(V,u,x,t)\} = 0.$$

або

$$B^T(t)V_x(x,t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)V_{xx}(x,t)\left(\Theta_i(t)x + \Psi_i(t)u(t) + h_i(t)\right) + 2D(t)u(t) = 0, \tag{6}$$

звідки вираз шуканого оптимального керування набув вигляду

$$u(t) = -\left[2D(t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)V_{xx}(x,t)\Psi_i(t)\right]^{-1} \times$$
$$\times\left(B^T(t)V_x(x,t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)V_{xx}(x,t)\left(\Theta_i(t)x + h_i(t)\right)\right). \tag{7}$$

Після підстановки (7) у рівняння Белмана (6) останнє набуло вигляду:

$$F(V, x, t) = 0,$$

ліва частина $F(V, x, t)$ якого задавалася формулою

$$F(V, u, x, t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \left(Ax + Bu(t), V_x(x,t)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(\Theta_i(t)x + \Psi_i(t)u(t) + h_i(t)\right)^T V_{xx}(x,t)\left(\Theta_i(t)x + \Psi_i(t)u(t) + h_i(t)\right) + \tag{8}$$

$$+x^T P(t)x + u^T(t)D(t)u(t),$$

в якій функція $U(t)$ визначалася співвідношенням (7).

Розв'язок рівняння Белмана (8) був знайдений у вигляді функції виду:

$$V(x,t) = x^T R(t)x + x^T r(t) + k(t),$$

де $R(t), r(t), k(t)$ — відповідно матрична, векторна і скалярна функції, що підлягали визначенню, причому $R(t) = R^T(t)$ — симетрична матриця.

Враховуючи, що

$$V_x(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = 2R(t)x + r(t), \quad V_{xx}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right]^T = 2R(t), \tag{9}$$

вираз оптимального керування (7) перетворили до вигляду лінійного зворотного зв'язку від стану $x(t)$ системи (1)

$$u(t) = S(t)x(t) + c(t), \tag{10}$$

де матриця зворотного зв'язку $S(t)$ і адитивний вектор $c(t)$ визначалися наступними формулами:

$$S(t) = -\left[D(t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)R(t)\Psi_i(t)\right]^{-1}\left(B^T(t)R(t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)R(t)\Theta_i(t)\right), \tag{11}$$

$$c(t) = -\left[D(t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)R(t)\Psi_i(t)\right]^{-1}\left(\frac{1}{2}B^T(t)r(t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)R(t)h_i(t)\right). \tag{12}$$

Для визначення $R(t), r(t)$ і $k(t)$ підставили в рівняння Белмана (7) функцію (8). Тоді, враховуючи співвідношення (9) та (10), рівняння Белмана набуло вигляду:

$$\begin{gathered}
x^T\frac{dR(t)}{dt}x + x^T\frac{dr(t)}{dt} + \frac{dk(t)}{dt} + 2x^T\left(A^T + S^TB^T\right)Rx + x^T\left(A^T + S^TB^T\right)r + \\
+2c^TB^TRx + c^TB^Tr + x^T\sum_{i=1}^{k}\left(\Theta_i + \Psi_iS\right)^T R\left(\Theta_i + \Psi_iS\right)x + \\
+x^T\sum_{i=1}^{k}\left(\Theta_i + \Psi_iS\right)^T R\left(\Psi_ic + h_i\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(\Psi_ic + h_i\right)^T R\left(\Psi_iS + \Theta_i\right)x + \\
+\sum_{i=1}^{k}\left(\Psi_ic + h_i\right)^T R\left(\Psi_ic + h_i\right) + x^TPx + x^TS^TDSx + x^TS^TDc + c^TDSx + c^TDc = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Останнє рівняння виконується при будь-яких векторах стану x, з нього отримали такі три диференціальні рівняння:

1) матричне диференціальне рівняння типу Ріккаті [3], якому задовольняє симетрична матриця $R(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dR(t)}{dt} = -A^T(t)R(t) - R(t)A(t) - P(t) - \sum\limits_{i=1}^{k}\Theta_i^T(t)R(t)\Theta_i(t) + \\ + \left(R(t)B(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}\Theta_i^T R(t)\Psi_i\right)\left(D(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}\Psi_i^T R(t)\Psi_i\right)^{-1}\left(B^T(t)R(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}\Psi_i^T R(t)\Theta_i\right), \\ R(T) = Q. \end{cases} \quad (14)$$

2) рівняння вектора $r(t)$, що є розв'язком системи звичайних матричних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dr(t)}{dt} = \left(-A^T(t) + \left(R(t)B(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}\Theta_i^T R(t)\Psi_i\right)\left(D(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}\Psi_i^T R(t)\Psi_i\right)^{-1} B^T(t)\right) r(t) + \\ +2\left(R(t)B(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}\Theta_i^T R(t)\Psi_i\right)\left(D(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}\Psi_i^T R(t)\Psi_i\right)^{-1} \sum\limits_{i=1}^{k}\Psi_i^T R(t)h_i - 2\sum\limits_{i=1}^{k}\Theta_i^T R(t)h_i, \\ r(T) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

та

3) рівняння виразу скалярної функції $k(t)$:

$$\frac{dk(t)}{dt} - \left(\frac{1}{2}r^T(t)B(t) + \sum_{i=1}^{k}h_i^T(t)R(t)\Psi_i(t)\right)\left(D(t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)R(t)\Psi_i(t)\right)^{-1} \times$$
$$\times\left(\frac{1}{2}B^T(t)r(t) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)R(t)h_i(t)\right) + \sum_{i=1}^{k}h_i^T(t)R(t)h_i(t) = 0. \quad (16)$$

Початкові умови для рівнянь (14), (15), (16) визначає співвідношення [1]:

$$V(x,T) = x^T R(T)x + x^T r(T) + k(T) = x^T Qx.$$

Останнє рівняння виконується при будь-яких станах об'єкт x, для яких знайшли кінцеві значення $R(T) = Q$, $r(T) = 0$, $k(T) = 0$.

Таким чином, оптимальне керування стохастичними багатовимірними об'єктами з адитивними та мультиплікативними збуреннями визначили за формулами (10) — (12), в яких симетрична матриця $R\,(T)$ задовольняє матричному диференціальному рівнянню типу Ріккаті [3].

Мінімальне значення критерію якості (2) при цьому має вигляд:

$$J_{\min} = \min_u J(u) = M_{x_0}\{V(x_0,t_0)\} = M_{x_0}\left\{x_0^T R(t_0)x_0\right\} +$$
$$+M_{x_0}\left\{x_0^T r(t_0)\right\} + k(t_0) = tr\left[R(t_0)Q_0\right] + m_0^T r(t_0) + k(t_0), \quad (17)$$

де $k(t_0)$ обчислюється за формулою:

$$k(t_0) = \int_{t_0}^{T}\left[\sum_{i=1}^{k}h_i^T(\tau)R(\tau)h_i(\tau) - \left(\frac{1}{2}r^T(\tau)B(\tau) + \sum_{i=1}^{k}h_i^T(\tau)R(\tau)\Psi_i(\tau)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(D(\tau) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(\tau)R(\tau)\Psi_i(\tau)\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}B^T(\tau)r(\tau) + \sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(\tau)R(\tau)h_i(\tau)\right)\right]d\tau.$$

Вирази оптимального керування при мінімальному значенні критерію якості функціонування системи, отримані в [1], приймають різні вигляди і залишаються справедливими, хоча і в залежності від умов за яких працює система. Ми проаналізували випадки функціонування оптимальної системи керування багатовимірним об'єктом для різних умов, а саме:

1. Якщо відсутні мультиплікативні збурення, такі як $\Theta_i(t)=0,\ \ \Psi_i(t)=0,\ \ i=1,2,\dots,k,$ то $r(t)=0,\ \ c(t)=0,$ то оптимальне керування (10) спрощується, приймаючи вигляд

$$u(t)=-D^{-1}(t)B^T(t)R(t)x(t), \tag{19}$$

де $R(t)=0$ є рішенням наступного матричного диференціального рівняння типу Ріккаті:

$$\begin{cases}\dfrac{dR(t)}{dt}=-A^T(t)R(t)-R(t)A(t)+R(t)B(t)D(t)^{-1}B^T(t)R(t)-P(t),\\ R(T)=Q.\end{cases} \tag{20}$$

Мінімальне значення критерію якості (2) при цьому дорівнює:

$$J_{\min}=\min_u J(u)=tr\left[R(t_0)Q_0\right]+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{T}h_i^T(\tau)R(\tau)h_i(\tau)d\tau. \tag{21}$$

2. Якщо ж адитивні збурення в системі (1) відсутні, тобто $h_i(t)=0$, $i=1,2,\dots,k,$ то $r(t)=0,\ \ k(t)=0,\ \ c(t)=0$ то, як наслідок, оптимальне керування дорівнює:

$$u(t)=-\left[D(t)+\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)R(t)\Psi_i(t)\right]^{-1}\left(B^T(t)R(t)+\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^T(t)R(t)\Theta_i(t)\right)x(t), \tag{22}$$

то при цьому мінімальне значення критерію (2) визначається формулою

$$J_{\min}=\min_u J(u)=tr\left[R(t_0)Q_0\right]. \tag{23}$$

3. Якщо система (1) стаціонарна і критерій її функціонування має вигляд

$$J(u)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T-t_0}M\left\{\int_{t_0}^{T}\left(x^T(t)Px(t)+u^T(t)Du(t)\right)dt\right\}, \tag{24}$$

то оптимальне керування такою системою визначається співвідношеннями (10), (11), (12) в яких матриця $R(t)$, формує зворотний зв'язок (10), що задовольняє матричному алгебраїчному рівнянню типу Ріккаті виду:

$$\begin{aligned}&A^TR+RA+P+\sum_{i=1}^{k}\Theta_i^TR\Theta_i-\\ &-\left(RB+\sum_{i=1}^{k}\Theta_i^TR\Psi_i\right)\left(D+\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^TR\Psi_i\right)^{-1}\left(B^TR+\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^TR\Theta_i\right)=0,\end{aligned} \tag{25}$$

а вектор r — є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}&\left(A^T-\left(RB+\sum_{i=1}^{k}\Theta_i^TR\Psi_i\right)\left(D+\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^TR\Psi_i\right)^{-1}B^T\right)r=\\ &=2\left(RB+\sum_{i=1}^{k}\Theta_i^TR\Psi_i\right)\left(D+\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^TR\Psi_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^TRh_i-2\sum_{i=1}^{k}\Theta_i^TRh_i,\end{aligned} \tag{26}$$

Вираз критерію (24) при цьому набуває вигляду:

$$J_{\min}=\sum_{i=1}^{k}h_i^TRh_i-\left(\frac{1}{2}r^TB+\sum_{i=1}^{k}h_i^TR\Psi_i\right)\left(D+\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^TR\Psi_i\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}B^Tr+\sum_{i=1}^{k}\Psi_i^TRh_i\right).$$

Таким чином, оптимальне керування стохастичними системами з мультиплікативними і адитивними збуреннями отримане у вигляді (7) лінійного матричного регулятора *U(t)* від стану системи, параметри якого можна обчислити для вибраних умов функціонування до початку процесу керування об'єктом. Для реалізації конструювання зворотного зв'язку як регулятора виникає необхідність у чисельному розв'язку різних за виглядом виразів відповідних, запропонованих тут відповідно до умов функціонування об'єкта керування матричних диференціальних або алгебраїчних рівняннь типу Ріккаті. Ці рівняння можна розв'язати за допомогою відомих математичних пакетів, зокрема, за допомогою програмного пакету MatLab, щоб щоб отримати вектор узагальненого стану багатовимірного об'єкта.

Висновки. Відомо, що реалізацію аналітичного конструювання оптимального керування стохастичними багатовимірними об'єктами можна здійснити використанням методу динамічного програмування з розв'язанням матричних диференціальних рівнянь Белмана та типу Ріккаті. Доведено, що вирази аналітично сконструйованих керувань (регуляторів) варіюють в залежності від умов збурення об'єкта керування, і одержані відповідні вирази керувань і критеріїв оптимальності.

Запропоновані тут вирази оптимальних керувань (регуляторів) враховують умови функціонування багатовимірного об'єкта керування і можуть бути простіше використані, ніж розв'язання задачі оптимального керування з самого початку, як в роботі [1].

Застосування відповідних до умов функціонування об'єкта керування розв'язків забезпечує при аналітичному конструюванні оптимального керування кращу якість системи, що призводить до зниження собівартості виробництва, зменшення енерговитрат, підвищення якості продукту та інших позитивних змін у виробництві.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лобок О.П.* Оптимальне управління стохастичними системами з адитивними та мультиплікативними збуреннями [Текст] / О.П. Лобок, М.В. Іващенко // Східно-Європейський журнал передових технологій. — 2011. — № 3. — с. 18 — 21.
2. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы [Текст] / А.Г. Александров; — М.: Высш.школа, 1989. — 263 с.
3. *Бертсекас Д.* Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени [Текст] / Д. Бертсекас, С. Шрив; — М.: Наука, 1985. — 280 с.
4. *Ладанюк А.П.* Теорія автоматичного керування (для студ.спец. напряму 0925 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».) [Текст] / А.П. Ладанюк; Нац. університет харчових технологій. — К.: НУХТ, 2006. — 169 с.
5. *Рощин А.В.* Синтез систем управления для стохастических объектов [Текст]: учеб.пособие. / А.В. Рощин; — М.: МГУПИ, 2008. — 87 с.

Выражения найденных при аналитическом конструировании оптимальных управлений, которые минимизируют интегральный критерий качества функционирования системы, зависят от случайных возмущений, в условиях которых проходит функционирование системы, а форма самого управления, как и вид интегрального критерия качества функционирования, изменяются в зависимости от этих условий. Это позволило исследовать влияние указаных возмущений и получить соответствующие им выражения управлений и критериев, а также наметить путь к получению соответствующего стохастического дифференцального матричного уравнения состояния и к его решению, чтобы получить вектор обобщенного состояния многомерного объекта.

Ключевые слова: синтез управления, возмущения, ректификационная колонна, уравнение состояния, оптимальное управление, критерий качества, динамическое программирование, уравнение Беллмана, уравнение Риккати.

O.P. Lobok, B.M. Goncharenko, I.V. Strunin

The influence of stochastic perturbations on the results of the multivariate design objects controls

In the analytical design control stochastic multidimensional objects optimal solution can be found, for example, by using dynamic programming. For this we must make consistent solution of matrix differential equations in partial derivatives of Bellman, Riccati equations and matrix system of ordinary differential equations, which would vary depending on changes in the ascending mathematical models of control objects and expressions of the integral criterion of quality control, which expresses purpose of synthesis. Finding the optimal control minimizes the expression of integral quality criterion of the system. When changing the conditions of the facility management under stochastic perturbation varies form solutions of the above equations, as well as more integral quality criterion. It is possible to investigate the impact of these perturbations to the vector solution of Riccati equations, get them appropriate expressions and identify ways to stochastic differential equations, the solution of which gives the generalized vector of an object.

Key words: synthesis control, perturbation of the equation, optimal control, the quality criterion, the dynamic programming, equation Bellman, Riccati equation.

Одержано редколегією 5.03.2012 р.