

# **ЖАРЧОВА ПРОМИСЛОВІСТЬ**

**№ 6**

**2008**



УДК 664:64-934.043.3

Б.М. ГОНЧАРЕНКО

А.М. СІЛЬВЕСТРОВ, доктори техн. наук

К.В. КОНОВАЛОВ,

Національний університет харчових технологій

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ОБ'ЄКТІВ ПРИ ЗАБЕЗПЕЧЕННІ ІНВАРІАНТНОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Розглянутий вплив точності математичної моделі об'єкта на виконання умов автономності і оптимальності системи автоматичного керування.

**Ключові слова:** математична модель, система автоматичного керування, точність, інваріантність, нестационарність.

Рассмотрено влияние точности математической модели объекта на выполнение условий автономности и оптимальности системы автоматического управления.

**Ключевые слова:** математическая модель, система автоматического управления, точность, инвариантность, нестационарность.

В системах автоматичного керування (САК) будь-яка модель об'єкта керування в умовах його нестационарної роботи при збуреннях  $N$  лише наближеного (з точністю до  $\epsilon$ ) відображає поведінку об'єкта в обмеженій робочій області  $G^*$  зміни керованих параметрів об'єкта  $X$  і керувальних діянь  $Y$  на обмеженому інтервалі  $T$  часу  $t$ . Чим менша область  $G^*$ , що включає  $X$ ,  $Y$  і  $t$ , тим менше  $\epsilon$ . Розглянемо, як точність (адекватність) моделі об'єкта впливає на виконання умов автономності і оптимальності САК.

З множини змінних (впливів і реакцій) об'єкта виділимо вектор-функції керування  $Y(t)$ , керовані змінні стану  $X(t)$ , вимірювані збурення  $N_1(t)$ , а неконтрольовані внутрішні і зовнішні змінні, а також складові похибки  $\epsilon$ , що відображають нелінійність і нестационарність об'єкта, представимо вектор-функцією  $N_2(t)$ . Тоді на інтервалі  $T$  часу модель об'єкта керування, що зв'яже змінні  $X$ ,  $Y$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ , можна подати у вигляді лінійної залежності:

$$X(t) = W \cdot Y(t) + W_1 \cdot N_1(t) + W_2 \cdot N_2(t), \quad (1)$$

де  $W$ ,  $W_1$ ,  $W_2$  — стаціонарні на  $T$  оператори відображення  $Y$ ,  $N_1$  та  $N_2$  у відповідну складову вектор-функції  $X(t)$ .

Інваріантність до збурень  $N_1$  та оптимальність за точністю стабілізації  $X$  в САК можна забезпечити відповідним керувальним діянням.

$$Y(t) = W_p(X(t), N_1(t), \beta), \quad (2)$$

де  $W_p$  — лінійний оператор регулятора;  $\beta$  — вектор невідомих параметрів моделі об'єкта керування.

При застосуванні в САК принципу регулювання за відхиленням  $e(t)$  поточного значення  $X(t)$  від бажаного  $X^*(t)$  керувальне діяння складає

$$Y(t) = W_p \cdot e(t), \quad (3)$$

Тоді модель об'єкта керування (1) набуває вигляду:

$$X(t) = W \cdot W_p [X^*(t) - X(t)] + W_1 N_1(t) + W_2 N_2(t) \quad (4)$$

Абсолютно інваріантною [1] САК буде за умови, якщо:

$$W_p = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha W^{-1} \quad (5)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт підсилення розімкненої САК.

За умови (5) та скінченних значень  $W_1 N_1(t)$  та  $W_2 N_2(t)$  вираз (4) набуває в САК бажаного значення  $X^*$ , що і свідчить про її інваріантність до збурень.

$$X(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^{-1} [\alpha X^*(t) + W_1 N_1(t) + W_2 N_2(t)] = X^* \quad (6)$$

Очевидне обмеження реалізації такої САК (за відхиленням), що впливає навіть при відомому операторі  $W$  з неможливості реалізації [2] зворотнього йому оператора  $W^{-1}$ , а також і з забезпечення умови  $\alpha \rightarrow \infty$ .

При застосуванні в САК комбінованого принципу керування [3] керувальне діяння формується з врахуванням і відхилення  $e(t)$  і збурення  $N_1$ .

$$Y(t) = W_{p1} e(t) + W_{p2} N_1(t), \quad (7)$$

а вираз (1) моделі об'єкта керування набуває вигляду:

$$X(t) = (W W_{p1} + 1)^{-1} [W W_{p1} X^*(t) + (W W_{p2} + W_1) N_1(t) + W_2 N_2(t)]. \quad (8)$$

За умови  $W_{p2} = -W^{-1} W_1$ , яка дає нульове значення оператора  $(W W_{p2} + W_1)$  при змінній  $N_1$  в (8), отримуємо інваріантну до  $N_1(t)$  САК. Але вона виходить неінваріантною до збурень  $N_2(t)$  і не є очевидно оптимальною відносно точності керування в САК, а та-



кож вимагає знання операторів  $W$  і  $W_1$  об'єкта керування, що є проблематичним.

Для оцінювання впливу цих операторів на точність керування в САК побудуємо модель об'єкта керування без врахування дії невимірюваних збурень  $N_2(t)$ :

$$\hat{X}(t) = \hat{W}(\hat{\beta})Y(t) + \hat{W}_1(\hat{\beta})N_1(t), \quad (9)$$

де вектор  $\hat{\beta}$  параметрів модельованих операторів  $\hat{W}(\hat{\beta})$

і  $\hat{W}_1(\hat{\beta})$  знаходиться за умови мінімуму середньоквад-

ратичної норми близькості виходів  $X(t)$  об'єкта (1) і  $\hat{X}(t)$  моделі (9) (з критерієм оптимальності як мінімальні похибки моделі):

$$J(\hat{\beta}) = \|X(t) - \hat{X}(t)\|^2 = \min. \quad (10)$$

Для забезпечення інваріантності та оптимальної точності САК модель (9) та алгоритм мінімізації критерію оптимальності (10) повинні шляхом поточного

підлаштування вектора  $\hat{\beta}$  параметрів моделі макси-

мально наближати сигнал моделі  $\hat{X}(t)$  до сигналу об'єкта  $X(t)$ . За рахунок поточного підлаштування вектора параметрів  $\hat{\beta}$  неявно і лише в деякій мірі усувається також вплив неконтрольованої множини випадкових збурень  $N_2(t)$ . Високочастотна складова  $N_2(t)$  як правило може усуватись за рахунок інерційності об'єкта керування і її усереднення. А низькочастотна складова  $N_2(t)$  компенсується в моделі (9) шляхом поточного підлаштування  $\hat{\beta}$  за умови мінімуму виразу (10).

Якщо врахувати похибку сигналів  $X(t)$  об'єкта (1) та  $\hat{X}(t)$  моделі (9), то

$$X(t) = \hat{X}(t) + \xi(t), \quad (11)$$

а похибка знайдеться як

$$\xi(t) = \left( \hat{W}(\hat{\beta}) - W \right) Y(t) + \left( \hat{W}_1(\hat{\beta}) - W_1 \right) N_1(t) - W_2 N_2(t). \quad (12)$$

Залежно від структури операторів  $\hat{W}$  і  $\hat{W}_1$  та якості налаштування  $\hat{\beta}$  норма похибки  $\|\xi(t)\|$  може бути більшою за відповідну норму  $\|W_2 N_2(t)\|$ , дорівнювати їй або бути меншою. Якщо оператори  $W$  і  $\hat{W}$  складніші за  $W$  і  $W_1$ , а перелаштування вектора  $\hat{\beta}$  задовольняє умову мінімуму (10) та врахуванням тільки низькочастотної складової  $N_2(t)$ , справедливою є нерівність

$$\|\xi(t)\| < \|W_2 N_2(t)\|. \quad (13)$$

В цьому випадку комбіноване керування (7), отримане для моделі (9) з операторами  $\hat{W}$  і  $\hat{W}_1$ , більш точне, ніж керування (7), отримане для точних операторів  $W$  і  $W_1$ , навіть якщо вони були відомими. Це визначається тим, що модель (9) з таким налаштуванням  $\hat{\beta}$ , яке задовольняє умову (13), частково враховує вплив і невимірюваних збурень  $N_2$ . Чим точніша модель (9) і кращий алгоритм оптимізації (10), тим ближча норма  $\|\xi(t)\|$  до нуля, а САК до абсолютної інваріантності.

Підстановка значення  $\hat{X}(t)$  з (9) у рівняння (11) дає

$$\begin{aligned} X(t) &= \hat{W}Y(t) \pm \hat{W}_1 N_1(t) + \xi(t) = \\ &= \hat{W} [W_{p1}(X^*(t) - X(t)) + W_{p2}N_1(t)] \pm \\ &\quad \pm W_1 N_1(t) + \xi(t) \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} X(t) &= \left( 1 + \hat{W} W_{p1} \right)^{-1} \times \\ &\times \left[ \hat{W} W_{p1} X^*(t) + \hat{W} W_{p2} N_1(t) \pm \hat{W}_1 N_1(t) + \xi(t) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Тепер за умови

$$W_{p2} = W^{-1} \hat{W}_1, \quad (15)$$

яка очевидно може бути реалізованою, бо  $\hat{W}$  і  $\hat{W}_1$  відомі, вихідна величина  $X(t)$  складає

$$X(t) = \left( 1 + \hat{W} W_{p1} \right)^{-1} \cdot \left[ \hat{W} W_{p1} X^*(t) + \xi(t) \right] \quad (16)$$

Для виразу моделі об'єкта керування (16) тепер можна вибрати регулятор  $W_{p1}$  такий, що задовольнить умову (10) оптимальної точності керування, і  $W_{p2}$ , що задовольнить умову автономності (15), яка саме і забезпечує інваріантність САК щодо збурень  $N_1$ , навіть за умови діяння нестационарних збурень  $N_2$ . Отже, цей вибір лімітується точністю моделі об'єкта керування (9), що впливає на виконання умов інваріантності та оптимальності САК.

**Висновок.** Виходячи з точності (адекватності) математичних моделей нестационарних об'єктів можна при застосуванні комбінованого принципу керування вибрати такі два регулятори, один з яких задовольняє умову оптимальної точності керування, а другий умову інваріантності системи керування, навіть за умови діяння нестационарних збурень.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Кухтенко А.Н. Проблема инвариантности в автоматике.— К.: Гостехиздат УССР, 1936.— 376.
2. Теория инвариантности и её применение // Труды В. Всесоюзного совещания.— К.: Наукова думка, ч. I, II, 1979.
3. Ладанюк А.П. Теория автоматического управления (курс лекцій, ч.1).— Вінниця, НУХТ, 2004.— 184 с.

Одержана редколлегиею 12.12.07 р.