

## ДИНАМІКА ГРАВІТАЦІЙНИХ ОПУСКНИХ ПРИСТРОЇВ

Створено математичну модель процесів переміщення вантажів у вигляді рівнянь руху, яка дає змогу визначити їхні кінематичні параметри на вибраній трасі спусків. Розв'язано задачу кінематичного синтезу гравітаційних прямолінійних спусків жолобчастої форми. Вибираючи відповідний і змінний по довжині спуску кут розклинювання жолоба  $\gamma$ , можна реалізувати різні закони руху вантажів. Виведено залежності, якими має визначатися цей кут по довжині спуску, щоб одержати різні закони руху.

У гравітаційних опускних пристроях передбачено передавання вантажів з верхніх рівнів на нижні завдяки силам тяжіння. Використовують пасивні пристрої, в яких опорні площини виконано у вигляді прямолінійної, криволінійної чи спіральної прямої або у вигляді роликів доріжок, та активні гравітаційні пристрої з приводними від сил тяжіння елементами, що супроводжують вантажі [1, 2]. До останніх належать гравітаційні елеватори та круто встановлені конвеєри.

Використання сил тяжіння для створення гравітаційних двигунів або виконання певних операцій здавна було у сфері інтересів науки і техніки. Добре відомою є задача про брахистохрону. Ця задача сформульована ще у 1696 році. У її розв'язанні брали участь Й. Бернуллі, Г.В. Лейбніц, Я. Бернуллі, Г.Ф. Лопіталь та І. Ньютон [3, 4]. В результаті було встановлено, що найбільшій швидкодії в опускному русі тіла в гравітаційному полі без урахування сил тертя відповідає спуск, виконаний у формі циклоїди.

Відносна простота конструктивного виконання гравітаційних опускних пристроїв пояснює їх значне поширення. При сталих по довжині пристроїв параметрах швидкість руху вантажів постійно зростає, а кінематичні параметри їхнього руху регулюються відповідним вибором геометрії спуску. Переміщення вантажів криволінійними спусками супроводжується виникненням відцентрових сил інерції. Пристрої можуть мати різні форми кривих, однак частіше використовують криволінійні поверхні, виконані у формі дуг кіл. Це означає, що радіуси кривизни опорних поверхонь на окремих ділянках будуть сталими, внаслідок чого суттєво спрощуються математичні моделі переміщень вантажів. Проте здебільшого існує потреба у використанні кривих інших форм з одночасним розв'язанням задачі швидкодії. Водночас актуальним залишається створення гравітаційних пристроїв з регульованою змінною або стабілізованою швидкістю переміщення як штучних, так і насипних вантажів.

У теорії механізмів і машин [5] відомо поняття зведеного коефіцієнта тертя  $f_{\Sigma}$ . Воно стосується тертя в клин-частих повзунах, і зведений коефіцієнт тертя (рис. 1) визначається за формулою

The mathematical model of processes of moving for cargoes as the equations of movement is created which allows to define of kinematics parameters the chosen line of descents. The task kinematics synthesis of gravitational rectilinear descents of the wedge form is decided. Appropriate and replaceable on length of descent the choice of a corner  $\gamma$  reaches an opportunity realization of the different laws of movement of cargoes. The dependencies with which are received the corner  $\gamma$  on length of descent can to be defined with the purpose of reception the different laws movement.

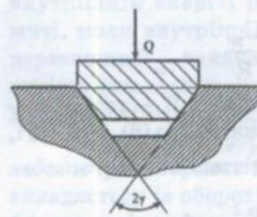


Рис. 1. Схема до визначення зведеного коефіцієнта тертя

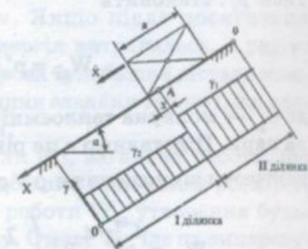


Рис. 2. Розрахункова схема до пристрою з двома ділянками

$$f_{\Sigma} = f / \sin \gamma, \quad (1)$$

де  $f$  — коефіцієнт тертя;  $\gamma$  — кут розклинювання жолоба.

Якщо гравітаційний опускний пристрій виконати з опорною поверхнею у вигляді жолоба, то для вантажів у м'якій упаковці і для насипних вантажів ефект зведеного коефіцієнта тертя теж буде існувати. У зв'язку з цим виникає можливість сили опору переміщення (сили тертя) зробити змінною і регульованою. Оскільки рушійна сила визначається виразом  $mg \sin \alpha$  (рис. 2), то, змінюючи кут  $\alpha$ , дістанемо можливість змінювати і її. Отже, існує можливість, наприклад, на прямолінійному гравітаційному опускному пристрої реалізувати сталу швидкість переміщення вантажу  $\dot{x} = \text{const}$ . Це стане можливим, якщо вантажу задати початкову швидкість  $\dot{x}$  або якщо пристрій буде мати ділянку розгону, на якій  $f'_{\Sigma} < f_{\Sigma}$ . При цьому кут  $\alpha$  буде залишатися незмінним. Можливий ще інший варіант,

$$\text{коли на ділянці } \alpha_{\text{розг}} > \alpha = \arctg \frac{f}{\sin \gamma}.$$

Розглянемо кінематику переміщення вантажу на пристрої, у якого траса поділена на дві ділянки (рис. 2). На ділянці траси I жолоб має кут розклинювання  $\gamma_1$ , а на ділянці II — кут  $\gamma_2$ , при цьому  $\gamma_1 > \gamma_2$ . Оскільки

$$\alpha = \arctg \frac{f}{\sin \gamma_2},$$

то на ділянці I рух вантажу буде прискореним і до досягнення передньої його грані точки А описується рівнянням першого етапу руху

$$\dot{x} = g \sin \alpha - f_{\text{зв1}} g \cos \alpha + V_0, \quad (2)$$

де  $V_0$  — початкова швидкість, яку вантаж має в точці 0;  $f_{\text{зв1}} = f / \sin \gamma_1$ .

Інтегруванням виразу (2) дістанемо

$$x = g \frac{t^2}{2} \sin \alpha - f_{\text{зв1}} \frac{t^2}{2} \cos \alpha + V_0 t. \quad (3)$$

Якщо довжина першої ділянки  $l_1$ , то кінцевою умовою руху вантажу по ній є  $x_k^I = l_1$ . Підставляючи  $x = x_k^I = l_1$  в умову (3) і розв'язуючи її відносно часу, визначимо  $t_k^I$ . Підставляючи у вираз (2), визначимо  $\dot{x}_k^I$ . Розв'язуючи питання синтезу, доцільно призначити кінцеву швидкість  $\dot{x}_k^I$ , тоді з формули (2) при  $\dot{x} = \dot{x}_k^I$  треба визначити  $t_k^I$ . Підстановкою  $t_k^I$  в рівняння (3) визначимо  $x_k = l_1$ .

Максимальну швидкість  $\dot{x}_k^I$  можна досягти за інших однакових умов, якщо вибрати  $\gamma_1 = 90^\circ$ .

На другому етапі руху (ділянка II) прискорення  $\ddot{x}$  буде зменшуватись від

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - f_{\text{зв1}} g \cos \alpha \quad (4)$$

до значення  $\ddot{x} = 0$ . Другому етапу відповідає переміщення вантажу на відстань, що дорівнює його довжині  $a$  від моменту завершення першого етапу. Тут рівняння руху запишемо у вигляді

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha - f_{\text{зв1}} mg \frac{a-x}{a} \cos \alpha - f_{\text{зв2}} mg \frac{x}{a} \cos \alpha. \quad (5)$$

Звідси

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - f_{\text{зв1}} g \cos \alpha + f_{\text{зв1}} g \frac{x}{a} \cos \alpha - f_{\text{зв2}} g \frac{x}{a} \cos \alpha;$$

$$\ddot{x} + \frac{g x}{a} \cos \alpha (f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}) = g \sin \alpha - f_{\text{зв1}} g \cos \alpha. \quad (6)$$

Характеристичне рівняння останнього диференціального рівняння записується у формі

$$r^2 + \frac{g \cos \alpha}{a} (f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}) = 0.$$

Це означає, що корені характеристичного рівняння

$$r_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{a} (f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}})} = 0$$

є уявними, а тому розв'язок рівняння (6) записуємо так:

$$x = A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t) + \frac{(\sin \alpha - f_{\text{зв1}} \cos \alpha) a}{f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}}, \quad (7)$$

$$\text{де } \beta = \sqrt{\frac{g (f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}) \cos \alpha}{a}}.$$

Сталі інтегрування  $A$  і  $B$  визначимо за початкових умов:  $t_n^{\text{II}} = 0$ ;  $x_n^{\text{II}} = 0$ ;  $\dot{x}_n^{\text{II}} = \dot{x}_k^I$ . Підставивши ці початкові умови в рівняння (7), дістанемо

$$B = - \frac{(\sin \alpha - f_{\text{зв1}} \cos \alpha) a}{f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}}. \quad (8)$$

Щоб визначити сталу інтегрування  $A$ , продиференціюємо рівняння (7):

Тоді за вибраних початкових умов

$$\dot{x}_k^I = A \beta \text{ і } A = \frac{\dot{x}_k^I}{\beta} = \dot{x}_k^I \sqrt{\frac{a}{g (f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}) \cos \alpha}}. \quad (9)$$

Остаточно дістанемо:

$$x = \dot{x}_k^I \sqrt{\frac{a}{g (f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}) \cos \alpha}} \sin(\beta t) - \frac{(\sin \alpha - f_{\text{зв1}} \cos \alpha) a}{f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}} \cos \beta + \frac{(\sin \alpha - f_{\text{зв1}} \cos \alpha) a}{f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}}; \quad (10)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_k^I \cos(\beta t) + \frac{(\sin \alpha - f_{\text{зв1}} \cos \alpha) a}{f_{\text{зв1}} + f_{\text{зв2}}} \sin \beta. \quad (11)$$

Другий етап руху завершується за умови

$$x = x_k^{\text{II}} = a = \dot{x}_k^I \sqrt{\frac{a}{g (f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}) \cos \alpha}} \sin(\beta t_k^{\text{II}}) - \frac{(\sin \alpha - f_{\text{зв1}} \cos \alpha) a}{f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}} \cos(\beta t_k^{\text{II}}) + \frac{(\sin \alpha - f_{\text{зв1}} \cos \alpha) a}{f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}}. \quad (12)$$

Тоді подальший рух вантажу буде відбуватися зі сталою швидкістю

$$\dot{x} = \dot{x}_k^{\text{II}} = \dot{x}_k^I \cos(\beta t_k^{\text{II}}) + \beta \frac{(\sin \alpha - f_{\text{зв1}} \cos \alpha) a}{f_{\text{зв2}} - f_{\text{зв1}}} \sin(\beta t_k^{\text{II}}). \quad (13)$$

Отже, на I ділянці переміщення, за винятком межової частини, де відбувається другий перехідний етап, маємо стале прискорення, максимальне значення якого для вибраного  $\alpha$  визначаємо за формулою

$$\ddot{x}_{\text{max}} = g \sin \alpha - f \cos \alpha,$$

якщо  $\gamma = 90^\circ$ . Збільшити значення  $\ddot{x} = \text{const}$  можна у разі, якщо збільшити кут нахилу  $\alpha$ .

**Висновки.**

1. Використання гравітаційних опускних пристроїв з клинчастими жолобами дає можливість одержати стабілізовані кінематичні параметри переміщення вантажів при змінних у широкому діапазоні значеннях кута нахилу  $\alpha$ .

2. Змінюванням величини кута розклинювання жолоба у можна досягти реалізації різних законів руху вантажів.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Справочник специалиста пищевых производств: В 2 кн. / А.И. Соколенко, А.И. Украинец, В.Л. Яровой и др.; Под ред. А.И. Соколенко. — К.: АртЕк, 2001. — Кн. 1. Механика. — 304 с.
2. Пакетоформирующие машины / А.И. Кривопляс, А.А. Кукибный, А.П. Беспалько и др. — М.: Машиностроение, 1982. — 239 с.
3. Трифонов Е.Д. Оптико-механическая аналогия в изложении для школьников // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 10. — С. 133–137.
4. Трифонов Е.Д. Вариационные принципы в физике // Соросовский образовательный журнал. — 1998. — № 6. — С. 106–111.
5. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. — К.: Наук. думка, 2001. — 660 с.

Надійшла до редколегії 20.05.03 р.