

**УКРАИНСКИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

Том XXVII, вып. 2

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

К теореме Харди и Литтльвуда

В. А. Бородин

Пусть G — односвязная, ограниченная область в комплексной плоскости z . Будем говорить, что функция $f(z) \in H^s(G)$, $0 < s \leq 1$, если $f(z)$ удовлетворяет условию

$$|f(z) - f(z')| \leq A|z - z'|^s, \quad z, z' \in \bar{G}, \quad (1)$$

где постоянная A не зависит ни от z , ни от z' . В случае, когда G — единичный круг, Харди и Литтльвуду принадлежит теорема, дающая необходимые и достаточные условия принадлежности аналитической в круге функции $f(z)$ классу H^s ($0 < s \leq 1$).

Теорема Харди и Литтльвуда [1]. Для того чтобы функция $f(z)$, аналитическая в $|z| < 1$, была непрерывна в $|z| \leq 1$ и на $|z| = 1$ удовлетворяла условию Липшица

$$|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_1})| \leq A|\theta - \theta_1|^s, \quad 0 < s \leq 1, \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы в $|z| < 1$ выполнялось неравенство

$$|f'(z)| \leq B(1 - r)^{s-1}, \quad r = |z|, \quad (3)$$

где постоянная B не зависит от z .

Доказанная ниже теорема 1 является обобщением цитированной теоремы на специальные локальные модули непрерывности и играет важную роль при доказательстве основной теоремы 2.

Пусть фиксированные числа $\theta_1^*, \dots, \theta_k^*$, $\gamma, \delta_1, \dots, \delta_k$ удовлетворяют условиям

$$\theta_j \in [0, 2\pi), \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \gamma + \delta_j < 1, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Рассмотрим функцию $\omega_{\theta_1}(h)$ вида

$$\omega_{\theta_1}(h) = h^\gamma \prod_{j=1}^k (|\theta_1 - \theta_j^*| + h)^{\delta_j}, \quad h \geq 0, \quad \theta_1 \in [0, 2\pi). \quad (4)$$

Функция $\omega_{\theta_1}(h)$ обладает очевидными свойствами: 1) неотрицательностью и 2) неубыванием по h при фиксированном θ_1 .

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(z)$, аналитическая в $|z| < 1$, была непрерывна в $|z| \leq 1$ и на $|z| = 1$ удовлетворяла условию

$$\sup_{|\theta - \theta_1| \leq h} |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_1})| \leq \omega_{\theta_1}(h), \quad (5)$$

где $\omega_{\theta_1}(h)$ имеет вид (4), необходимо и достаточно, чтобы в круге $|z| < 1$ выполнялось неравенство

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^{1-\gamma}} \prod_{j=1}^k [|\theta_1 - \theta_j^*| + (1-r)]^{\delta_j}, \quad z = re^{i\theta_1}. \quad (6)$$

Символ \leq означает порядковое неравенство с абсолютной постоянной. Символ \approx означает порядковое равенство.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть $f(z)$ — аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leq 1$ функция, которая на окружности $|z| = 1$ удовлетворяет условию (5). Представим $f(z)$ в $|z| < 1$ по формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) e^{it}}{e^{it} - z} dt.$$

Отсюда имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) e^{it}}{(e^{it} - z)^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) - f(e^{i\theta_1})}{(e^{it} - z)^2} e^{it} dt, \quad (7)$$

где $z = re^{i\theta_1}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{it}) - f(e^{i\theta_1})|}{|1 - re^{i(\theta_1 - t)}|^2} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega_{\theta_1}(|\varphi|)}{|1 - re^{i\varphi}|^2} d\varphi \leq \int_0^{\pi} \frac{\varphi^\nu [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + r\varphi^2} d\varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\theta^* = \theta_{j_0}^*$ ближайшая к θ_1 точка из совокупности $\theta_1^*, \dots, \theta_k^*$, и $\delta = \delta_{j_0}$. Поскольку оценку (6) следует получить для r , близких к единице, то будем предполагать, что $1 > r \geq \frac{1}{2}$. Поэтому

$$|f'(z)| \leq \int_0^{\pi} \frac{\varphi^\nu [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi = I. \quad (9)$$

Для доказательства неравенства (6) достаточно показать, что

$$I \leq \frac{1}{(1-r)^{1-\nu}} [|\theta_1 - \theta^*| + (1-r)]^\delta. \quad (10)$$

Для доказательства неравенства (9) рассмотрим два случая:

а) Пусть $|\theta_1 - \theta^*| \leq 1-r$. Тогда неравенство (9) эквивалентно неравенству

$$I \leq \frac{1}{(1-r)^{1-\nu-\delta}}. \quad (10')$$

Разобьем оцениваемый интеграл I на три интеграла I_1, I_2, I_3

$$I = \left(\int_0^{|\theta_1 - \theta^*|} + \int_{|\theta_1 - \theta^*|}^{1-r} + \int_{1-r}^{\pi} \right) \frac{\varphi^\nu [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi = I_1 + I_2 + I_3. \quad (11)$$

Оценим последовательно интегралы I_1, I_2, I_3 :

$$I_1 = \int_0^{|\theta_1 - \theta^*|} \frac{\varphi^\nu [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi \approx \int_0^{|\theta_1 - \theta^*|} \frac{\varphi^\nu |\theta_1 - \theta^*|^\delta}{(1-r)^2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\gamma + 1} \frac{|\theta_1 - \theta^*|^{\gamma + \delta + 1}}{(1-r)^2} \leq \frac{1}{(1-r)^{1-\gamma-\delta}}, \quad (12)$$

$$I_2 = \int_{|\theta_1 - \theta^*|}^{1-r} \frac{\varphi^\gamma [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi \asymp \int_{|\theta_1 - \theta^*|}^{1-r} \frac{\varphi^{\gamma+\delta}}{(1-r)^2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\gamma + \delta + 1} \frac{(1+r)^{\gamma+\delta+1} - |\theta_1 - \theta^*|^{\gamma+\delta+1}}{(1-r)^2} \leq \frac{1}{(1-r)^{1-\gamma-\delta}}, \quad (13)$$

$$I_3 = \int_{1-r}^{\pi} \frac{\varphi^\gamma [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi \leq \int_{1-r}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2-(\gamma+\delta)}} d\varphi = \frac{1}{1-\gamma-\delta} \frac{1}{(1-r)^{1-\gamma-\delta}}. \quad (14)$$

Подставляя оценки (12) — (14) в (11), получим справедливость неравенства (10).

б) Пусть $|\theta_1 - \theta^*| > 1 - r$. Тогда неравенство (10) эквивалентно неравенству

$$I \leq \frac{1}{(1-r)^{1-\gamma}} |\theta_1 - \theta^*|^\delta. \quad (10'')$$

Разобьем оцениваемый интеграл I на три интеграла

$$I = \left(\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{|\theta_1 - \theta^*|} + \int_{|\theta_1 - \theta^*|}^{\pi} \right) \frac{\varphi^\gamma [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi = I_1' + I_2' + I_3'. \quad (15)$$

Оценим последовательно интегралы I_1' , I_2' , I_3' :

$$I_1' = \int_0^{1-r} \frac{\varphi^\gamma [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi \asymp \int_0^{1-r} \frac{\varphi^\gamma |\theta_1 - \theta^*|^\delta}{(1-r)^2} d\varphi = \frac{1}{\gamma + 1} \frac{|\theta_1 - \theta^*|^\delta}{(1-r)^{1-\gamma}}, \quad (16)$$

$$I_2' = \int_{1-r}^{|\theta_1 - \theta^*|} \frac{\varphi^\gamma [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi \asymp \int_{1-r}^{|\theta_1 - \theta^*|} \varphi^{\gamma-2} |\theta_1 - \theta^*|^\delta d\varphi \leq$$

$$\leq |\theta_1 - \theta^*|^\delta \int_{1-r}^{\infty} \varphi^{\gamma-2} d\varphi = \frac{1}{1-\gamma} \frac{|\theta_1 - \theta^*|^\delta}{(1-r)^{1-\gamma}}, \quad (17)$$

$$I_3' = \int_{|\theta_1 - \theta^*|}^{\pi} \frac{\varphi^\gamma [|\theta_1 - \theta^*| + \varphi]^\delta}{(1-r)^2 + \varphi^2} d\varphi \asymp \int_{|\theta_1 - \theta^*|}^{\pi} \varphi^{\gamma+\delta-2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{1-\gamma-\delta} \frac{|\theta_1 - \theta^*|^\delta}{|\theta_1 - \theta^*|^{1-\gamma}} \leq \frac{|\theta_1 - \theta^*|^\delta}{(1-r)^{1-\gamma}}. \quad (18)$$

Подставляя оценки (16) — (18) в (15), получим справедливость неравенства (10'').

Объединяя случаи а) и б), доказали, что при предположениях теоремы справедлива оценка (10). Таким образом, необходимость теоремы доказана.

Наоборот, пусть для аналитической в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$ выполнено неравенство (6). Тогда интеграл $\int_0^1 f'(re^{i\theta}) dr$ сходится при каждом θ_1 и, следовательно, предел $f(e^{i\theta_1}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_1})$ существует при каждом θ_1 . Кроме того, интегрируя (6) по r от 0 до r , $0 < r < 1$, видим, что $f(z)$ ограничена в $|z| < 1$ и поэтому представима интегралом Пуассона через свои предельные значения $f(e^{i\theta_1})$ [1]. Для доказательства достаточности достаточно показать, что имеет место неравенство (5), ибо непрерывность функции $f(z)$ в $|z| \leq 1$ будет следовать из теоремы Фату [1]. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $|\theta - \theta_1| = h \leq \frac{1}{2} \min_{j \neq j'} (|\theta_j^* - \theta_{j'}^*|)$.

Имеем

$$f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_1}) = \int_l f'(z) dz, \quad (19)$$

где кривая l составлена из радиальных отрезков $(e^{i\theta}, \rho e^{i\theta})$, $(\rho e^{i\theta_1}, e^{i\theta_1})$ и дуги $(\rho e^{i\theta}, \rho e^{i\theta_1})$ на окружности $|z| = \rho$, где $\rho = 1 - |\theta - \theta_1| = 1 - h$.

Из (19) следует, что

$$\begin{aligned} |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_1})| &\leq \int_0^1 |f'(re^{i\theta})| dr + \left| \int_0^{\theta_1} \rho f'(\rho e^{it}) e^{it} dt \right| + \\ &+ \int_0^1 |f'(re^{i\theta_1})| dr = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Оценим последовательно интегралы J_1, J_2, J_3 .

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 |f'(re^{i\theta})| dr = \int_{1-h}^1 \frac{1}{(1-r)^{1-\gamma}} [|\theta - \theta^*(\theta)| + (1-r)]^{\delta(\theta)} dr = \\ &= \int_0^h \frac{1}{x^{1-\gamma}} [|\theta - \theta^*(\theta)| + x]^{\delta(\theta)} dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Для оценки J_1 рассмотрим два случая.

а) Пусть $|\theta - \theta^*(\theta)| \geq h$. Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^h \frac{1}{x^{1-\gamma}} |\theta - \theta^*(\theta)|^{\delta(\theta)} dx \asymp h^\gamma |\theta - \theta^*(\theta)|^{\delta(\theta)} \asymp \\ &\asymp h^\gamma [|\theta - \theta^*(\theta)| + h]^{\delta(\theta)} \asymp h^\gamma [|\theta_1 - \theta^*(\theta_1)| + h]^{\delta(\theta_1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

б) Пусть $|\theta - \theta^*(\theta)| < h$. Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \left(\int_0^{|\theta - \theta^*(\theta)|} + \int_{|\theta - \theta^*(\theta)|}^h \right) \frac{1}{x^{1-\gamma}} [|\theta - \theta^*(\theta)| + x]^{\delta(\theta)} dx = \\ &= \int_0^{|\theta - \theta^*(\theta)|} \frac{1}{x^{1-\gamma}} |\theta - \theta^*(\theta)|^{\delta(\theta)} dx + \int_{|\theta - \theta^*(\theta)|}^h \frac{1}{x^{1-\gamma}} x^{\delta(\theta)} dx = \\ &= |\theta - \theta^*(\theta)|^{\gamma + \delta(\theta)} + h^{\gamma + \delta(\theta)} \leq h^{\gamma + \delta(\theta)} \leq h^\gamma [|\theta_1 - \theta^*(\theta_1)| + h]^{\delta(\theta_1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Интеграл J_3 оценивается аналогично интегралу J_1 :

$$J_3 \leq |\theta - \theta_1|^\gamma [|\theta_1 - \theta^*(\theta_1)| + |\theta - \theta_1|]^{(6)(\theta_1)}. \quad (24)$$

Для оценки J_2 ,

$$J_2 = \left| \int_{\theta}^{\theta_1} \rho \frac{1}{(1-\rho)^{1-\gamma}} [|\theta - \theta^*(t)| + (1-\rho)]^{(6)(t)} dt \right|,$$

заметим, что для t , лежащих между θ и θ_1 , имеет место соотношение

$$[|\theta - \theta^*(t)| + |\theta - \theta_1|]^{(6)(t)} \leq [|\theta_1 - \theta^*(\theta_1)| + |\theta - \theta_1|]^{(6)(\theta_1)}, \quad (25)$$

поэтому

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{\rho}{(1-\rho)^{1-\gamma}} [|\theta_1 - \theta^*(\theta_1)| + (1-\rho)]^{(6)(\theta_1)} \left| \int_{\theta}^{\theta_1} dt \right| \leq \\ &\leq |\theta - \theta_1|^\gamma [|\theta_1 - \theta^*(\theta_1)| + |\theta - \theta_1|]^{(6)(\theta_1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя оценки (23), (24), (26) в (20), получим, что

$$|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_1})| \leq |\theta - \theta_1|^\gamma [|\theta_1 - \theta^*(\theta_1)| + |\theta - \theta_1|]^{(6)(\theta_1)}. \quad (27)$$

Теорема 1 доказана.

Определим класс областей, для которых справедлива теорема 2. Пусть $z = \psi(\tau) = \gamma_0 + \gamma_1\tau + \gamma_2\tau^2 + \dots$, $\gamma_1 > 0$, — регулярная в $|\tau| < 1$ функция, конформно и однолистно отображающая единичный круг $|\tau| < 1$ на односвязную, ограниченную область G так, что при этом начало координат переходит в фиксированную точку $z_0 \in G$. Обозначим через $\tau = \varphi(z)$ функцию, обратную к ψ .

Пусть $\tau_j = e^{i\theta_j^*}$, $\theta_j^* \in [0, 2\pi)$, $j = 1, \dots, k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — различные точки окружности $|\tau| = 1$, $z_j = \psi(\tau_j)$; β_j , $0 < \beta_j < 2$, $\beta_j \neq 1$, $j = 1, \dots, k$, — фиксированное число; h' — фиксированное число $h' \in (0, h'_0)$, где $h'_0 = \frac{1}{2} \min \left(|\theta_j^* - \theta_{j'}^*|, \frac{1}{2} \right)$, $j, j' = 1, \dots, k$; $U_j = \left\{ \tau : \left| \arg \frac{\tau}{\tau_j} \right| < h' \right.$
 $\left. |\tau| < 1 \right\}$, U' — дополнение $\bigcup_{j=1}^k U_j$ к области $|\tau| < 1$.

Будем говорить, что область G принадлежит классу $(L_j) = (L_j)(z_1, \beta_1, \dots, z_k, \beta_k)$, если существуют две постоянные C'_1 и C'_2 , $0 < C'_1 < C'_2 < \infty$, такие, что

$$C'_1 |\tau - \tau_j|^{\beta_j - 1} \leq |\psi'(\tau)| \leq C'_2 |\tau - \tau_j|^{\beta_j - 1}, \quad \tau \in U_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$C'_1 \leq |\psi'(\tau)| \leq C'_2, \quad \tau \in U',$$

$$\psi(\tau) = \psi(\tau_j) + A'_j(\tau) (\tau - \tau_j)^{\beta_j}, \quad \tau \in U_j, \quad j = 1, \dots, k \quad (28)$$

где для функций $(\tau - \tau_j)^{\beta_j}$ фиксированы некоторые ветви и $A'_j(\tau)$, $j = 1, \dots, k$, — функции, регулярные в $|\tau| < 1$, непрерывные в точке τ_j , $A'_j(\tau_j) \neq 0$. Точку z_j , $j = 1, \dots, k$, а также ее образ $e^{i\theta_j^*}$ и угловую координату θ_j^* будем называть угловой точкой с внутренним углом β_j .

Положим $\bar{\beta} = \max \{1, \beta_1, \dots, \beta_k\}$. Будем говорить, что $f(z) \in A^s(G)$, $0 < s \leq 1$, если $f(z)$ — функция, аналитическая в области G , и $f(z) \in H^s(G)$.

Теорема 2. Пусть область $G \in L_i(z_1, \beta_1, \dots, z_k, \beta_k)$. Для того чтобы аналитическая в G функция $f(z) \in H^s(G)$, $0 < s < \frac{1}{\bar{\beta}}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|f'(z)| \leq d^{s-1}, \quad (29)$$

где d — расстояние от точки z до границы ∂G области G .

Теорема 2 следует из теоремы 1, если воспользоваться следующей леммой.

Лемма. Предположим, что область $G \in L_i(z_1, \beta_1, \dots, z_k, \beta_k)$. Пусть на границе ∂G области G заданы две точки $\zeta_1 = \psi(\tau_1) = \psi(e^{i\theta_1})$ и $\zeta_2 = \psi(\tau_2) = \psi(e^{i\theta_2})$, тогда

$$\begin{aligned} |\zeta_1 - \zeta_2| &\asymp |\tau_1 - \tau_2| \prod_{j=1}^k [|\tau_1 - \tau_j| + |\tau_1 - \tau_2|]^{\beta_j - 1} \asymp \\ &\asymp |\theta_1 - \theta_2| \prod_{j=1}^k [|\theta_1 - \theta_j^*| + |\theta_1 - \theta_2|]^{\beta_j - 1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Доказательство леммы см. в работах [2, 3].

Доказательство теоремы 2. Из леммы следует, что для того, чтобы $f(z) \in A^s(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $f^*(\tau) = f(\psi(\tau))$ была аналитической в $|\tau| < 1$, непрерывной в $|\tau| \leq 1$ и на $|\tau| = 1$ удовлетворяла условию

$$\sup_{|\theta - \theta_1| \leq h} |f^*(e^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta_1})| \leq \omega_{\theta_1}(h),$$

где

$$\omega_{\theta_1}(h) = h^s \prod_{j=1}^k [|\theta_1 - \theta_j^*| + h]^{s(\beta_j - 1)}. \quad (31)$$

При условиях теоремы 2 функция $\omega_{\theta_1}(h)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому для того, чтобы $f(z) \in A^s(G)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} |f^{**}(re^{i\theta_1})| &\leq \frac{1}{(1-r)^{1-s}} \prod_{j=1}^k [|\theta_1 - \theta_j^*| + (1-r)]^{s(\beta_j - 1)} \asymp \\ &\asymp \frac{1}{(1-r)^{1-s}} \frac{1}{|\tau - \tau^*|^{s(1-\beta_*)}}, \quad \tau = re^{i\theta_1}, \end{aligned} \quad (32)$$

где τ^* — ближайшая к τ угловая точка, β_* — величина угла τ^* . Заметим, что

$$|f^{**}(\tau)| = |f'(z)| |\psi'(\tau)| \asymp |f'(z)| |\tau - \tau^*|^{\beta_* - 1}.$$

Поэтому (32) эквивалентно неравенству

$$|f'(z)| \leq |\tau - \tau^*|^{1-\beta_*} \frac{1}{(1-r)^{1-s}} \frac{1}{|\tau - \tau^*|^{s(1-\beta_*)}} \asymp d^{s-1},$$

где z принадлежит r -й линии уровня, d — расстояние от точки z до границы области G . Теорема 2 доказана.

В заключение выражаю В. К. Дзядыку благодарность за постановку задач, помощь в работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Г о л у з и н, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
2. В. К. Д з я д ы к, О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, № 5, 1959.
3. Н. А. Л е б е д е в, Н. А. Ш и р о к о в, О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами. Изв. АрмССР, сер. матем., т. 6, № 4, 1971.

Поступила 29.V 1974 г.,
после переработки — 19.XI 1974 г.
Институт математики АН УССР