В.А. Бородин

Замечания к теореме Скотта и Уолла

В работе рассматриваются вопросы сходимости непрерывных дробей с частными знаменателями равными единице.

$$G=\cfrac{1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_2}{1+\ldots}}} \qquad (1)$$

Специальная форма непрерывной дроби не является существенным ограничением, поскольку любая дробь эквивалентным преобразованиями быть приведена к виду (1).

Подходящими дробями непрерывной дроби (1).

$$\frac{A_2}{B}=\frac{1}{1+a_2};\ \frac{A_3}{B_3}=\cfrac{1}{1+\cfrac{a_2}{1+a_3}}=\frac{1+a_3}{1+a_2+a_3};..$$

$$(2)$$

$$\frac{A_n}{B_n}\cfrac{1}{1+\cfrac{a_2}{1+.\qquad\begin{array}{c}.\\ .\\ +\cfrac{1}{1+a_n}\end{array}}}$$

Говорят, что непрерывная дробь (1) сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=G \qquad (3)$$

Ван Влек и Принсгейм [2] доказали, что, если все частные числители a_n непрерывной дроби (1) лежат в достаточно малой окрестности произвольной точки a, $a\notin(-\infty;1/4)$, то непрерывная дробь (1) сходится.

В работе [2] установлена важная «параболическая » теорема:

Если параболической области комплексной плоскости z

$$a_n=\{z:|z|-Re\,z\le\frac{1}{2},|z|\le M<\infty\},\ M-\text{любое}, \qquad (4)$$

тогда непрерывная дробь (1) сходится. Через $Re\,z$, $Im\,z$т обозначены, действительная и мнимая части числа z.

В работе [1] рассмотрен случай, когда частичные числители лежат в меньшей параболической области, но $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Доказательство «параболической» теоремы Скотта и Уолла основывается на сопоставлении непрерывной дроби некоторого числового ряда, получении фундаментальных неравенств, которые обеспечивают сходимость ряда. Проектирование фундаментальных неравенств на прямую позволяет «повернуть» параболическую область сходимости.

Теорема: Если для любого $\varphi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, все частные числители a_n непрерывной дроби

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{1 + \ldots}}} \tag{4}$$

лежат в параболической области

$$\{ z : |z| \le Re\left(ze^{-i\varphi}\right) + t \}, \quad 2t < cos\,\varphi , \tag{5}$$

и, кроме того

$$|a_n| \le M + a_n, \quad a < cos\,\varphi - 2t , \tag{6}$$

то непрерывная дробь сходится.

Следствие. Если все частные числители a_n лежат на луче $Im\,z = tg\,\varphi \cdot Re\,z,\ Re\,z > 0\ \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ и $|a_n| \le M < \infty$, то непрерывная дробь (4) сходится.

1. Barer G.a.Jr. Essential of Pade approximants. – New York: Acad. press, 1975.– 301h.

2. Scott W.T., Wall H.S. A convergence theorem for continued fractions. – Trans. Amer. Math. Soc., 1940,47,p 155–172