

УДК 517.5

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ. — Київ, 1994. — 35 с. — (Препр./АН України. Ін-т математики; 94.5).

Вивчається наближення функцій класів $\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$, заданих на всій осі, узагальненими операторами Зигмунда та операторами $U_{\beta, \Gamma}$.

Знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень цих операторів на класі (ψ, β) диференційованих функцій в рівномірній метриці.

Затверджено до друку вченою радою
Інституту математики АН України

© Інститут математики АН України, 1994

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ОПЕРАТОРАМИ ЗИГМУНДА

В роботах О.І.Степанія [1–4] введені нові класи $\widehat{L}_p^{\psi} \mathfrak{A}$ функцій $f(\cdot)$, які задані на всій дійсній осі таким чином.

Нехай \widehat{L}_p , $p \geq 1$, — множина функцій, заданих на всій дійсній осі \mathbb{R} , які мають скінченну норму

$$\|f\|_p = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{-x}^x |f(x+a)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$\|f\|_{\infty} = \|f\|_M = \text{ess sup } |f(x)|$, тобто $\widehat{L}_{\infty} = M$.

Через $\psi(x)$ позначимо опуклу функцію при $x \in [1, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$, якщо $v \rightarrow \infty$ і на $[0, 1]$ $\psi(v)$ задана так, щоб вона була неперервною, $\psi(0) = 0$, а $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на $[0, \infty)$. Множину таких функцій позначимо через \mathfrak{A} .

Підмножину $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких виконується умова

$$\int_0^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt \leq K < \infty,$$

позначимо через F .

Нехай β — фіксоване число, $\beta \in \mathbb{R}$. В роботі [1, с. 18–19] доведено таке твердження:

Якщо $\psi \in F$, $\beta \in \mathbb{R}$, то функція

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}(t; \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv$$

сумовна на \mathbb{R} , при цьому при $|t| \rightarrow \infty$ $\widehat{\psi}(t) = O(t^{-2})$. Якщо $\psi \in \mathfrak{A}$, то сумовною буде функція $\widehat{\psi}(t; 0)$.

Через \widehat{L}_p^{ψ} позначимо множину функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже при всіх x мають зображення

$$f(x) = A_0 + \int_0^{\infty} \phi(x+t) \widehat{\psi}(t; \beta) dt = A_0 + (\phi * \widehat{\psi}_{\beta})(x), \quad (1)$$

не A_0 — стала і $\phi \in \hat{L}_1$, а інтеграл розглядається як $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f$. Якщо $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ і $\mathfrak{M} \subset \hat{L}_1$, то будемо вважати, що $f \in \hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{M}$.

Підмножини неперервних функцій із $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{M}$ позначають $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{M}$.

Якщо $\phi(t)$ є періодичною функцією та $\hat{\psi}(t)$ інтегровна на всій осі, то $\hat{L}_\beta^\psi L^0(0, 2\pi) = L_\beta^0$, де L^0 — множина 2π -періодичних функцій $\phi(x)$, для яких

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) dt = 0.$$

Якщо \mathfrak{M} — деяка підмножина із $L_\beta^0(0, 2\pi)$, то $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{M} = L_\beta^\psi \mathfrak{M}$, $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{M} = C_\beta^\psi \mathfrak{M}$. Тому, по аналогії з періодичним випадком, кожну функцію, еквівалентну $\phi(t)$ в співвідношенні (1) називають (ψ, β) -похідною функції $f(x)$ і позначають $f_\beta^\psi(x)$.

Якщо $\mathfrak{M} = M$ і $\|f\|_\infty \leq 1$, то клас неперервних функцій позначають $\hat{C}_{\beta, \infty}^\psi$, якщо ж $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ і $\|f_\beta^\psi\|_1 \leq 1$, то такий клас позначають $\hat{L}_{\beta, 1}^\psi$.

Агрегатами наближення неперервних функцій $f(x) \in \hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{M}$ і, зокрема, $\hat{C}_{\beta, \infty}^\psi$ будуть служити функції $U_\sigma(f, x)$, які будуються таким чином [1, 3, 4].

Нехай $\Lambda = \{\lambda_\sigma(v)\}$ — сім'я функцій, неперервних при всіх $v \geq 0$, що залежать від дійсного параметра σ . Кожній функції $f \in \hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{M}$ співставимо вираз

$$\begin{aligned} U_\sigma(f, x) &= U_\sigma(f; x, \Lambda) = \\ &= A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \int_0^\infty \psi(v) \lambda_\sigma(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt, \end{aligned} \quad (2)$$

що являє собою формулу підсумовування для інтегралу в (1).

Якщо

$$\lambda_\sigma(v) = \begin{cases} 1 - (\frac{v}{\sigma})^s, & 0 \leq v \leq \sigma \\ 0, & v \geq \sigma \end{cases}, \quad s > 0$$

то (2) називається оператором Зигмунда і позначається $Z_\sigma^{(s)}(f, x)$,

$$Z_\sigma^{(s)}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \int_0^\sigma (1 - (\frac{v}{\sigma})^s) \psi(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt.$$

В періодичному випадку при $\sigma \in \mathbb{N}$ $Z_\sigma^{(s)}(f, x)$ є сумою Зигмунда [5] порядку $\sigma - 1$.

Якщо $\lambda_\sigma(v)$ має вигляд

$$\lambda_\sigma(v) = \begin{cases} 1 - v \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}, & 0 \leq v \leq 1, \\ 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma-v)}, & 1 \leq v \leq \sigma, \\ 0, & v \geq \sigma, \end{cases} \quad (3)$$

то (2) називають узагальненим оператором Зигмунда і позначають $Z_\beta^\psi(f, x, \Lambda)$.

З умов, накладених на функцію $\psi(v)$, з леми [6, с. 228] та твердження 7 [3, с. 110] при $f \in \hat{C}_{\beta, \infty}^\psi$ випливає, що $Z_\beta^\psi(f, x, \Lambda)$ є цілою функцією експоненціального типу $\leq \sigma$. Для кожної функції $f \in \hat{C}_{\beta, \infty}^\psi$ покладемо $\rho_\sigma(f, x) = f(x) - Z_\beta^\psi(f, x, \Lambda)$.

Враховуючи співвідношення (1) і (2), маємо

$$\rho_\sigma(f, x, \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \hat{\tau}_\sigma(t) dt, \quad (4)$$

де

$$\hat{\tau}_\sigma(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_\sigma(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv \quad (5)$$

і

$$\tau_\sigma(v) = \begin{cases} v \psi(\sigma) \frac{\psi(v)}{\psi(1)}, & 0 \leq v \leq 1, \\ \psi(\sigma), & 1 \leq v \leq \sigma, \\ \psi(v), & v \geq \sigma. \end{cases} \quad (6)$$

Однією з основних задач для введених класів є вивчення поведінки верхніх меж відхилень операторів $U_\sigma(f, x, \Lambda)$, тобто поведінки величини

$$E_\sigma(\hat{C}_{\beta, \infty}^\psi \mathfrak{M}, U_\sigma(f, x, \Lambda))_C = \sup_{f \in \hat{C}_{\beta, \infty}^\psi \mathfrak{M}} \|f(x) - U_\sigma(f, x, \Lambda)\|_C.$$

О. І Степанець [1-4] досліджував властивості класів $\hat{C}_{\beta, \infty}^\psi \mathfrak{M}$ та поведінку верхніх меж відхилень операторів Фур'є $F_\sigma(f, x)$ на цих класах.

Оператори Фур'є задаються за допомогою сімї функцій

$$\lambda_\sigma(v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq c, \\ \frac{\sigma-v}{\sigma}, & c \leq v \leq \sigma, \\ 0, & v \geq \sigma. \end{cases}$$

В періодичному випадку $F_\sigma(f, x)$ є суми Фур'є порядку $[\sigma] - 1$.

М. Г. Дзимистарішвілі [7] досліджував поведінку верхніх меж відхилень операторів Зигмунда, Стеклова, Рогозинського від функцій класів $\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$ та $\widehat{L}_{\beta, 1}^{\psi}$ в рівномірній і інтегральній метриках.

В даній роботі вивчаються наближення функцій класів $\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$ узагальненими операторами Зигмунда. При цьому встановлені оцінки верхніх меж відхилень

$$\varepsilon_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}(f, x))_C = \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}} \|\rho_{\sigma}(f, x)\|_C = \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}} \|f(x) - Z_{\sigma}^{\psi}(f, x)\|_C,$$

а в деяких випадках одержані асимптотичні рівності.

В періодичному випадку Д. М. Бушев [8] досліджував поведінку верхніх меж відхилень сум Зигмунда на класах $C_{\beta, \infty}^{\psi}$.

І. Б. Ковальська [9] досліджувала поведінку величин $\varepsilon_n(C_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_n^{\psi})_C$ і $\varepsilon_n(L_{\beta, 1}^{\psi}, Z_n^{\psi})_C$.

Нагадаємо, що із множини \mathcal{M} отулих вниз на $[1, \infty)$ функцій $\psi(\cdot)$ ($\psi(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$) в роботі [10] за допомогою функцій

$$\mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad \eta(t) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(t)\right]$$

виділено три класи функцій $\psi(t)$:

$$\mathcal{M}_1: K_1 \leq \mu(t) \leq K_2,$$

$$\mathcal{M}_0: 0 < \mu(t) \leq K_2, \quad K_1, K_2 = \text{const},$$

$$\mathcal{M}_{\infty}: \mu(t) \text{ монотонно зростає.}$$

Відповідні класи \mathcal{A} будемо позначати $\mathcal{A}_C, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\infty}$.

Далі будемо використовувати оцінки, доведені в роботах [10, с. 59–60; 4, с. 212; 1, с. 28]. Якщо $\psi \in \mathcal{A}_C \cup \mathcal{A}_{\infty}$, то

$$\int_0^{\mu(\sigma)} \left| \int_0^{\infty} \psi(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv \right| dt = O(1) \psi(\sigma), \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \left| \int_0^{\sigma} \psi'(\sigma v) \sin(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv \right| dt = O(1) \psi'(\sigma). \quad (8)$$

Теорема 1. Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{A}_C \cup \mathcal{A}_{\infty}$. Тоді:

якщо $\mu(\sigma) \leq \sigma$, то

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \psi(\sigma) \ln \sigma + O(1) \psi(\sigma) &\leq \varepsilon_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) \leq \\ &\leq \frac{2\psi(\sigma) \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \ln \sigma + \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \ln \mu(\sigma) + O(1) \psi(\sigma), \quad \sigma \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

якщо $\mu(\sigma) \geq \sigma$, то

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \ln \mu(\sigma) + O(1) \psi(\sigma) &\leq \mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi, Z_\sigma^\psi) \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \ln \sigma + \frac{4}{\pi^2} \ln \mu(\sigma) + O(1) \psi(\sigma), \quad \sigma \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доведення.

Приймаючи до уваги (див. [10]) інваріантність класів $\widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi$ відносно зсуву аргумента, будемо розглядати $\rho_\sigma(f, z)$ при $z = 0$.

Зробивши заміну змінних в (4), маємо

$$\rho_\sigma(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\infty} \tau(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt = J_1 + J_2,$$

де

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\infty} \tau(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\sigma + \int_\sigma^{\mu(\sigma)} + \int_{\mu(\sigma)}^\infty \right) f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\infty} \tau(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt, \\ J_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\infty} \tau(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt. \end{aligned}$$

Використовуючи оцінку (7), одержуємо

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \left| \int_0^\sigma f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \sigma v \psi(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(\sigma) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv + \int_1^\infty \psi(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv \right) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} (\psi(1) \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \sigma v^2|_0^{\frac{1}{2}} + \psi(\sigma) + O(1) \psi(\sigma)) = O(1) \psi(\sigma), \end{aligned} \quad (9)$$

Нехай $\mu(\sigma) \leq \sigma$. Тоді маємо

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\mu(\sigma)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \sigma v \psi(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sigma\pi} \psi(\sigma) (\mu(\sigma) - \pi) = O(1) \psi(\sigma) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(\sigma) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \psi(\sigma) \left(\frac{\sin(t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} - \frac{\sin(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2})}{t} \right) dt = \\ &= \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \left(\frac{\sin(t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\cos \frac{t}{\sigma} \sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} - \frac{\sin \frac{t}{\sigma} \cos \frac{\beta\pi}{2}}{t} \right) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin \frac{t}{\sigma} \cos \frac{\beta\pi}{2}}{t} dt \right| \leq \\ & \leq \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left| \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} \frac{1}{\sigma} dt \right| = O(1) \psi(\sigma) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\cos \frac{t}{\sigma} \sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} dt \right| = \\ &= \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2} ((\cos \frac{t}{\sigma} - 1) + 1)}{t} dt \right| = \\ &= \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \left(\frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} 2 \sin^2 \frac{t}{2\sigma} + \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} \right) dt \right| = \\ &= O(1) \psi(\sigma) + \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} dt \right|. \end{aligned} \quad (13)$$

Отже,

$$\left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(\sigma) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| =$$

$$= \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left| \int_{\mu(\sigma)}^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} dt \right| + O(1) \psi(\sigma). \quad (14)$$

Далі,

$$\begin{aligned} \int_{\mu(\sigma)}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \hat{r}_{\sigma}(t) dt &= \left(\int_{\mu(\sigma)}^{\sigma} + \int_{\sigma}^{\infty} \right) f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \hat{r}_{\sigma}(t) dt. \\ \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mu(\sigma)}^{\sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \sigma v \psi(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| &= O(1) \psi(\sigma). \end{aligned} \quad (15)$$

Інтегруючи частинами і використовуючи оцінку (8), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mu(\sigma)}^{\sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(\sigma) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv + \right. \right. \\ \left. \left. + \int \psi(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv \right) dt \right| = \\ = \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mu(\sigma)}^{\sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\psi(\sigma) \sin(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2})}{t} dt \right| + O(1) \psi(\sigma); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mu(\sigma)}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \hat{r}_{\sigma}(t) dt &= \\ = \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mu(\sigma)}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \frac{\sigma}{t} (\psi(\sigma v) v)' \sin(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| + \\ + \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{t} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \psi'(\sigma v) \sin(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| = \\ = |J_1^1| + O(1) \psi(\sigma). \\ J_1^1 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mu(\sigma)}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \frac{\sigma^2}{t} \psi'(\sigma v) v \sin(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \frac{\sigma}{t} \psi(\sigma v) \sin(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \end{aligned} \quad (17)$$

Палі маємо

$$\begin{aligned}
 J_1^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \left[\frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \left(-\frac{\sigma}{t^2} \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) \psi'(1) + \right. \right. \\
 &+ \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \psi'(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv + \\
 &+ \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} v \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) d\psi'(\sigma v) - \\
 &\left. \left. - \frac{\sigma}{t^2} \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) \psi(1) + \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) \psi'(\sigma v) dv \right] dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \left[-\frac{\sigma \psi(\sigma) \psi'(1) \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{\psi(1) t^2} - \right. \\
 &- \frac{\sigma \psi(\sigma) \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2} + \frac{2\sigma^2}{t^2} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \psi'(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv + \\
 &\left. + \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} v \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) d\psi'(\sigma v) \right] dt. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Оскільки $\psi'(v)$ —функція обмеженої варіації на $[0, \infty)$, то

$$\left| \int_a^b f(x) d\Phi(x) \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| V_a^b[\Phi],$$

(18) одержимо

$$\begin{aligned}
 &\frac{\psi(\sigma)}{\pi \psi(1)} \left| \int_0^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} v \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) d\psi'(\sigma v) dt \right| \leq \\
 &\leq \frac{\psi(\sigma)}{\pi \psi(1)} \int_0^{\infty} \frac{\sigma^2}{t^2} \cdot \frac{1}{\sigma} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} |d\psi'(\sigma v)| = O(1) \psi(\sigma); \tag{19} \\
 &\frac{2\psi(\sigma)}{\pi \psi(1)} \left| \int_0^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \psi'(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2\psi(\sigma)}{\pi\psi(1)} \int_{\sigma}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^{\frac{t}{2}} \sup_{0 \leq v \leq \frac{t}{2}} |\psi'(\sigma v)| dv = O(1)\psi(\sigma), \quad (20)$$

$$\frac{\psi(\sigma)\psi'(1)}{\pi\psi(1)} \left| \int_{\sigma}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sigma \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2} dt \right| = O(1)\psi(\sigma); \quad (21)$$

$$\frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left| \int_{\sigma}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sigma \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2} dt \right| = O(1)\psi(\sigma); \quad (22)$$

Таким чином, з (9)–(22) маємо

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma}(f, x) &= \frac{1}{\pi} \psi(\sigma) \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt - \\ &\quad - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\mu(\sigma) \leq |t| \leq \sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt - \\ &\quad - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} dt + O(1)\psi(\sigma) = \\ &= \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt - \\ &\quad - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_{\pi \leq |t| \leq \sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{dt}{t} + O(1)\psi(\sigma). \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) &= \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}} \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} dt \right| + O(1)\psi(\sigma) \end{aligned} \quad (24)$$

Використовуючи рівність (7.31) [10, с. 114], маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) &\leq \\ &\leq \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2} \ln \mu(\sigma) + \frac{2\psi(\sigma) \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \ln \sigma + O(1)\psi(\sigma) \end{aligned} \quad (25)$$

Для того, щоб одержати оцінку знизу, розглянемо функцію $f^*(x)$, (ψ, β) -

похідна якої визначається так:

$$f_{\beta}^{\circ\psi}(t) = \begin{cases} +1, & -1 \leq t \leq 0, \\ -1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

В цьому випадку функція

$$f^{\circ}(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\circ\psi}(x+t) \hat{\psi}(t) dt$$

буде належати класу $\hat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$. Тоді із (24) одержимо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\sigma}(\hat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) &\geq |\rho(f^{\circ}, 0)| = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left| \int_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} dt + \right. \\ &+ \left. \int_{\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} dt + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^1 \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} dt \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \psi(\sigma) \ln \sigma + O(1) \psi(\sigma). \end{aligned} \quad (26)$$

Таким чином, із співвідношень (25) та (26) маємо

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \psi(\sigma) \ln \sigma + O(1) \psi(\sigma) &\leq \mathcal{E}_{\sigma}(\hat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) \leq \\ &\leq \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \ln \sigma + \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2} \ln \mu(\sigma) + O(1) \psi(\sigma). \end{aligned}$$

Нехай тепер $\mu(\sigma) > \sigma$. Згідно з оцінкою (10), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{2\sigma}}^{\sigma} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \sigma v \psi(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| = \\ = O(1) \psi(\sigma). \end{aligned} \quad (27)$$

Використовуючи міркування такі ж, як і при одержанні оцінок (11) і (12), маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{2\sigma}}^{\sigma} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^1 \psi(\sigma) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| = \\ = \frac{1}{\pi} \psi(\sigma) \left| \int_{\frac{\pi}{2\sigma}}^{\sigma} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \left(\frac{\sin(t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} - \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{t} \right) dt \right| + O(1) \psi(\sigma). \end{aligned} \quad (28)$$

Інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \int_0^{\infty} \tau(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt = \\
 & = \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \left[- \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \frac{\sigma}{t} \sin(vt + \frac{\beta\pi}{2}) (v\psi(\sigma v))^{\gamma} dv + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\psi(v)}{t} \sin(t + \frac{\beta\pi}{2}) \right] dt + \\
 & \quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \int_1^{\infty} \psi(\sigma v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Далі, врахувавши (8), одержимо

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\infty} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \int_0^{\infty} \tau(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt \right| = \\
 & = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\infty} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \left[- \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \frac{\sigma}{t} \sin(vt + \frac{\beta\pi}{2}) \times \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \times (v\psi(\sigma v))^{\gamma} dv \right] dt \right| + O(1) \psi(\sigma). \tag{30}
 \end{aligned}$$

Об'єднавши (29) і (30) і використавши вже зроблені оцінки, одержимо

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\infty} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \frac{\sigma}{t} \sin(vt + \frac{\beta\pi}{2}) (v\psi(\sigma v))^{\gamma} dv dt \right| + \\
 & \quad + \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \frac{\psi(\sigma)}{t} \sin(t + \frac{\beta\pi}{2}) dt \right| = \\
 & = O(1) \psi(\sigma) + \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \frac{\psi(\sigma)}{t} \sin(t + \frac{\beta\pi}{2}) dt \right|. \tag{31}
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\rho_0(f, \infty) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\tau \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi} \left(\frac{t}{\sigma} \right) \frac{\sin(t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} dt - .$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin \frac{\beta \pi}{2}}{t} dt - \\
& - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\sigma \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta \pi}{2}\right)}{t} dt + O(1) \psi(\sigma) = \\
& = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta \pi}{2}\right)}{t} dt - \\
& - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin \frac{\beta \pi}{2}}{t} dt + O(1) \psi(\sigma) \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\sigma}(\tilde{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) &= \sup_{f \in \tilde{C}_{\beta, \infty}^{\psi}} \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta \pi}{2}\right)}{t} dt - \right. \\
& \left. - \sin \frac{\beta \pi}{2} \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \sigma} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{1}{t} dt \right| + O(1) \psi(\sigma). \quad (33)
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\sigma}(\tilde{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) &\leq \\
&\leq \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2} \ln \mu(\sigma) + \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \left| \sin \frac{\beta \pi}{2} \right| \ln \sigma + O(1) \psi(\sigma). \quad (34)
\end{aligned}$$

Покладемо $f_{\beta}^{\psi}(t) = \text{sign} \sin\left(\sigma t + \frac{\beta \pi}{2}\right)$, де

$$\text{sign } t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Тоді функція

$$f^*(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}(x+t) \tilde{\psi}(t) dt$$

належить класу $\tilde{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$.

Очевидно, що

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\tilde{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) \geq |\rho_{\sigma}(f^*, Z_{\sigma}^{\psi})|.$$

Із співвідношення (33) одержимо

$$|\rho_{\sigma}(f^*, Z_{\sigma}^{\psi})| = \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} \frac{|\sin(\sigma t + \frac{\beta \pi}{2})|}{t} dt - \right.$$

$$-\sin \frac{\beta\pi}{2} \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2} \leq |t| \leq 1} \frac{\text{sign} \sin(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} dt + O(1) \psi(\sigma). \quad (35)$$

Оцінимо кожен з інтегралів в (35)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\mu(\sigma)} \frac{|\sin(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2})|}{t} dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\mu(\sigma)} \frac{|\sin(t + \frac{\beta\pi}{2})|}{t} dt = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\beta\pi}{2}}^{\mu(\sigma) + \frac{\beta\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t - \frac{\beta\pi}{2}} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\mu(\sigma)} \frac{|\sin t|}{t} dt + O(1) = \frac{2}{\pi} \ln \mu(\sigma) + O(1) \end{aligned} \quad (36)$$

(див. [10, с. 114]). Аналогічно можна одержати рівність

$$\int_{-\mu(\sigma)}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2})|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \ln \mu(\sigma) + O(1). \quad (37)$$

Оскільки функція $\text{sign} \sin(t + \frac{\beta\pi}{2})$ змінює знак через рівні проміжки, а $\frac{1}{t}$ монотонно спадає, то між кожними двома точками, де вона змінює знак, міститься нуль x_t функції

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} \frac{\text{sign} \sin(t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} dt$$

(див. [10, с. 59]) і при цьому перший нуль справа від точки $x = \pi$ знаходиться в проміжку $[\pi, 2\pi]$, тобто маємо

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} \frac{\text{sign} \sin(t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \frac{1}{t} dt = O(1), \quad (38)$$

Отже, з (35)–(38) одержимо

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) \geq \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \ln \mu(\sigma) + O(1) \psi(\sigma),$$

що і доводить теорему. ■

Наслідок 1. Якщо $\mu(\sigma) = O(1)$, то при $\sigma \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) = \frac{2}{\pi} \psi(\sigma) \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \ln \sigma + O(1) \psi(\sigma).$$

Доведення. Згідно з (24)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, Z_\sigma^\psi) &= \\ &= \sup_{f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^\psi} \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin(t + \frac{\beta\pi}{2})}{t} dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_{\pi \leq |t| \leq \sigma} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{dt}{t} \right| + O(1) \psi(\sigma). \end{aligned}$$

Якщо $\mu(\sigma) = O(1)$, то

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, Z_\sigma^\psi) \leq \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \ln \sigma + O(1) \psi(\sigma).$$

З протилежного боку, із (26) маємо

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, Z_\sigma^\psi) \geq \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \ln \sigma + O(1) \psi(\sigma),$$

Теорема 2. Нехай $\sin \frac{\beta\pi}{2} = 0$. Тоді при $\sigma \rightarrow \infty$ справедлива така асимптотична рівність:

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, Z_\sigma^\psi) = \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \ln \mu(\sigma) + O(1) \psi(\sigma).$$

Доведення. Ця теорема є наслідком теореми 1. Дійсно, з (9)–(38) випливає, що

$$\rho_\sigma(f, 0) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin t}{t} dt + O(1) \psi(\sigma).$$

Використавши результат роботи [10, с. 114], маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, Z_\sigma^\psi) &= \sup_{f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^\psi} |\rho_\sigma(f, 0)| = \\ &= \frac{1}{\pi} \psi(\sigma) \sup_{f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^\psi} \left| \int_{\pi \leq |t| \leq \mu(\sigma)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin t}{t} dt \right| + O(1) \psi(\sigma) = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \ln \mu(\sigma) + O(1) \psi(\sigma). \end{aligned} \quad (39)$$

Список литературы

1. Степанец А. И. Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближение целыми функциями на действительной оси.—Киев, 1988.—С. 3–41.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
2. Степанец А. И. Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн.—1988.—40, N 4.—С. 198–209.
3. Степанец А. И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн.—1991.—42, N 1.—С. 102–112.
4. Степанец А. И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же.—N 2.—С. 210–222.
5. Zygmund A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke Math. J.—1945.—12, N 4.—P. 695–704.
6. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.—М.: Наука, 1965.—407 с.
7. Дзмиштаршвили М. Г. Приближение классов непрерывных функций операторами Зигмунда // Приближение операторами Зигмунда и наилучшее приближение.—Киев, 1986.—С. 3–42.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.25).
8. Бушев Д. Н. Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда.—Киев, 1984.—64 с.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 1.56).
9. Ковальская И. Б. Приближение классов периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике L // Приближение классов периодических функций одной и многих переменных в метриках C и L_p .—Киев, 1988.—59 с.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 88.14).
10. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций.—Киев: Наук. думка, 1987.—286 с.