УДК 517.9:519.46

ТОЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ ОДНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

А.І. Скотар, І.І.Юрик

Анотація. *Досліджується рівняння реакції дифузії. У явному виді знайдені оператори умовної симетрії. Побудовані нові точні розв’язки цього рівняння.*

Ключові слова: *точні розв’язки, рівняння реакції-дифузії, оператори умовної симетрії.*

Вступ. Розглядається таке рівняння:

$$u_t = \Delta u + f(u) \tag{1}$$

де $u = u(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $f(n)$ - деяка фіксована функція від незалежної змінної u.

Під класичною симетрію [1] рівняння (1) ми розуміємо існування групи перевірених перетворень для залежних і незалежних змінних, що зберігають його форму. Умовна симетрія [2] означає існування такої групи при умові, що u задовольняє і деяка додаткове рівняння.

Методи досліджень. Оскільки рівняння (1) симетричне відносно групи обертань $O(n)$, то рівняння (1) редукується до рівняння:

$$u_t - u_{xx} - \frac{n-1}{x} u_x = f(n) \tag{2}$$

Оператор умовної симетрії даного рівняння шукаємо у вигляді:

$$X = \frac{\partial}{dt} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + (-\pi u + \omega)\frac{\partial}{\partial u},$$

де

$$\xi = \xi(t;x),$$
$$\pi = \pi(t;x),$$
$$\omega = \omega(t;x).$$

Цей оператор є генератором умовної симетрії рівняння (2), якщо це рівняння сумісне з умовою $Xu = 0$.

Нехай

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \pi, \quad .$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{n-1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

Функції ξ, π будемо визначити з умови:

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi + \theta Q, \tag{3}$$

де Λ, φ, θ - функції від t і x.

У результаті нескладних обчислень комутатора $\left[Q,L\right]$, який допускає зображення (3), одержимо наступну систему рівнянь для визначення функцій $\Lambda,\varphi,\theta,\xi,\pi$:

$$2\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\Lambda,\Lambda+\theta=0$$

$$\xi\frac{n-1}{x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+2\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{n-1}{x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}=\theta\xi-\frac{n-1}{x}\Lambda$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}+\frac{n-1}{x}\cdot\frac{\partial\pi}{\partial x}=\theta\pi+\varphi\cdot$$

Доведемо таке твердження. Оператор

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+\xi\frac{\partial}{\partial x}-\pi u\frac{\partial}{\partial u}$$

є оператором умовної симетрії рівняння (2) у випадку $f\left(u\right)=\pm u^k+C_2u$.

Якщо

$$\pi\left(x\right)=-\frac{2\xi x}{1-k},$$

а функція

$$\xi=\xi\left(x\right)$$

є розв'язком системи:

$$\begin{cases}\dfrac{n-1}{x}\xi+\xi^2+\dfrac{3+k}{1-k}\xi_x=C_1\\ \dfrac{n-1}{x}\xi_{xx}+\xi_{xxx}-2\xi_x{}^2+C_2\left(1-k\right)\xi_x=0\end{cases}.$$

Результати та обговорення. Нехай $n=5,f\left(u\right)=-u^{1/3}$. Тоді рівняння (2) має вигляд:

$$u_t-u_{xx}-\frac{u}{x}u_x=-u^{1/3} \tag{4}$$

Це рівняння допускає оператор умовної симетрії:

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3}{x^2}u\frac{\partial}{\partial u},$$

якому відповідає підстановки:

$$u=\frac{1}{x^3}\omega\left(z\right),z=\frac{x^2}{2}-t,$$

що редукує рівняння (4) до рівняння:

$$\omega''-\omega^{1/3}=0. \tag{5}$$

Рівняння (5) є рівняння Емдена-Фаулера і його частинний розв'язок має вигляд:

$$\omega=\frac{\sqrt{6}}{36}z^3\cdot$$

Тому знаходимо розв'язок рівняння (4):

$$u=\frac{\sqrt{6}}{36}\left(\frac{(x_1^2+\ldots+x_5^2)^{\frac{3}{2}}}{8}-\frac{3}{4}(x_1^2+\ldots+x_5^2)^{\frac{1}{2}}t+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}\frac{t^2}{(x_1^2+\ldots+x_5^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{t^3}{(x_1^2+\ldots+x_5^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Нехай $n=3,\ f(u)=\pm u^{-1}$. Тоді маємо рівняння

$$u_t-u_{xx}-\frac{2}{x}u_x=\pm u^{-1}. \qquad (6)$$

Це рівняння допускає оператор умовної симетрії

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\left(k'-\frac{1}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{x^2}u\frac{\partial}{\partial u}\cdot$$

Якщо $k'=0$, то підстановка

$$u=\frac{1}{x}\omega(z),\ z=\frac{x^2}{2}+t$$

редукує рівняння (6) до рівняння $\omega''\pm\omega^{-1}=0$, загальний розв'язок якого буде

$$z=\int\left(\pm2\ln\omega+C_1\right)^{-u_2}d\omega+C_2.$$

Висновки.

Таким чином, встановлено, що для нелінійного рівняння реакції – дифузії існують оператори умовної симетрії, при чому ці оператори знайдені у явному виді. А це в свою чергу дало можливість побудувати нові точки розв'язки.

Література:

1. Овсянников Л.В. Груповой анализ дифференциальных уравнений. – М: Наука, 2000. – 400 с.

2. Баранник Т.А. Умовна симетрія і точні розв'язки багатовимірного рівняння дифузії// Укр.мат.журн.—2002.— Т. 54, №10.—с.1416—1420.

Авторська довідка:

Скотар А.І., *студентка факультету АКС-ІІ-2.*

Юрик І.І., *к. ф.-м. наук, професор, кафедра вищої математики, Національний університет харчових технологій, e-mail: i.yu@ukr.net.*