УДК 517.9 .519.46

ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ БАГАТОВИМІРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ.

EXACT SOLUTIONS OF MULTI-DIMENSIONAL NON-LINEAR WAVE EQUATIONS.

О.В.Островская, И.И. Юрик

О.В.Островська, І. І. Юрик

O.V. Ostrovska, I.I.Yuryk

Для побудови нових розв'язків нелінійних хвильових рівнянь запропоновано метод узагальненої симетрійної редукції,тобто,якщо маємо симетрійний анзац $u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, ..., \omega_L) + g(x)$*,то розвязки будуємо з допомогою нового анзацу* $u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, ..., \omega_L) + g(x)$*,де змінні* $\omega_{k+1}, ..., \omega_L$ *визначаємо з умови, що редуковане рівняння, яке відповідає цьому анзацу , співпадає з редукованим рівнянням, яке відповідає симетрійному анзацу . Це дало можливість одержати принципово нові точні розв'язки нелінійних хвильових рівнянь, які неможливо отримати з використанням класичного методу С. Лі або методу умовної симетрії. Одержані розв'язки можуть бути використані у прикладних дослідженнях і стати ефективним інструментом перевірки адекватності математичних моделей.*

Для построения новых решений нелинейных волновых уравнений предложено метод обобщенной симметрийной редукции. тоесть,если имеем симетрийный анзац $u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, ..., \omega_L) + g(x)$*,то решения строим с помощью нового анзаца* $u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, ..., \omega_L) + g(x)$*,где переменные* $\omega_{k+1}, ..., \omega_L$ *определяем с условия, что редуцированное уравнение, которое соответствует етому анзацу , совпадает с редуцированным уравнением, которое соответствует симетрийному анзацу . Это дало возможность получить принципиально новые точные решения нелинейных волновых уравнений, которые невозможно получить при использовании классического метода С. Ли, или метода условной симметрии. Полученные решения могут быть использованы в прикладных исследованиях и стать эффективным инструментом проверки адекватности математических моделей.*

A generalized symmetry reduction method is developed to construct new solutions of non-linear wave equations. This provided a possibility to obtain essentially new exact solutions of non-linear wave equations, which cannot be obtained by using the classical S.Lie's method or the conditional symmetry method. The obtained solutions can be used in applied research and provide an effective tool to verify mathematical models.

Ключові слова: точні розв'язки, хвильові рівняння, симетрійна редукція, алгебра симетрії, редуковане рівняння.

Key words: exact solutions, wave equations, symmetry reduction, algebra of symmetries, reduced equation.

Ключевые слова: точные решения, волновые уравнения, симметрийная редукция, алгебра симметрии, редуцированное уравнение.

Вступ. Одним з ефективних методів побудови розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики є метод симетрійної редукції рівняння до рівнянь з меншим числом змінних, зокрема, до звичайних диференціальних рівнянь [1-3] . Цей метод грунтується на дослідженні підгрупової структури групи інваріантності даного диференціального рівняння. Розв'язки, одержувані при цьому, є інваріантними відносно підгрупи групи інваріантності рівняння. Слід відзначити, що інваріантність накладає дуже жорсткі умови на розв'язки, тому симетрійна редукція не дозволяє одержати достатньо широкі класи розв'язків. Розширити множину розв'язків дає ідея умовної інваріантності диференціальних рівнянь [3-5]. Під умовною симетрією рівняння розуміють симетрію деякої підмножини розв'язків. Для деяких важливих нелінійних рівнянь математичної фізики існують підмножини розв'язків, симетрія яких суттєво відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків. Такі підмножини виділяють, як правило, з допомогою додаткових умов, які є диференціальними рівняннями в частинних похідних. Опис в явному вигляді цих додаткових умов є складною проблемою, і на жаль, яких-небудь ефективних методів щодо її розв'язання не існує.

Метою дослідження є отримання нових точних розв'язків многомірних нелінійних хвильових диференційних рівнянь*, які неможливо отримати з використанням класичного методу С. Лі або методу умовної симетрії.*

Виклад основного матеріалу. В даній статті, використовуючи метод запропонований в [6,7] побудовані нові класи розв'язків рівнянь Ліувілля, сінус-Гордона і Ейконала. Суть методу полягає в наступному. Нехай маємо рівняння в частинних похідних

$$F(x, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) = 0, \qquad (1)$$

$$u = u(x), \quad x = (x_0, x_1, \ldots x_n) \in \mathrm{R}_{1,n},$$

де $\underset{m}{u}$ - сукупність усіх похідних m -го порядку, і нехай рівняння (1) має нетривіальну алгебру симетрії. Для побудови розв'язків рівняння (1) використаємо симетрійний (або умовно- симетрійний) анзац [3]. Припустимо, що він має вигляд

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k) + g(x), \qquad (2)$$

де $\omega_1 = \omega_1(x_0, x_1, ..., x_k), ..., \omega_k = \omega_k(x_0, x_1, ..., x_k)$ - нові незалежні змінні. Анзац (2) виділяє із всієї множини розв'язків рівняння (1) деяку підмножину S. Побудуємо (якщо це можливо) новий анзац

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, ..., \omega_L) + g(x), \qquad (3)$$

який є узагальненням анзацу (2). Тут $\omega_{k+1}, ..., \omega_L$ - нові змінні, які необхідно визначити. Змінні $\omega_{k+1}, ..., \omega_L$ будемо визначати з умови, що редуковане рівняння, яке відповідає анзацу (3), співпадає з редукованим рівнянням, яке відповідає анзацу (2). Анзац (3) виділяє підмножину S_1 розв'язків рівняння (1), яке є розширенням підмножини S. Якщо відомі розв'язки підмножини S, то можна побудувати і розв'язки підмножини S_1. Ці розв'язки будуються в такий спосіб.

Нехай $u = u(x, C_1, ..., C_t)$ є багатопараметричною сім'єю розв'язків вигляду (2) рівняння (1), де $C_1, ..., C_t$ - довільні сталі. Ми одержимо більш загальну сім'ю розв'язків рівняння (1), якщо в розв'язку $u = u(x, C_1, ..., C_t)$ сталі $C_i, i = 1, ..., t$ вважати довільними гладкими функціями від $\omega_{k+1}, ..., \omega_L$.

Розглянемо рівняння Ліувілля

$$\Box u + \lambda \exp u = 0.$$

(4)

Рівняння (4) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1, \mathrm{n})$ з базисними елементами

$$J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b,$$

$$P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \quad a, b = 1, 2, ...n.$$

Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1), \quad \omega_1 = x_3$, редукує рівняння (4) до рівняння

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \lambda \exp\varphi(\omega_1).$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо, що φ співпадає з однією з таких функцій:

$$\ln\left\{\left(-\frac{C_1}{2\lambda}\right)\sec^2\left[\frac{\sqrt{-C_1}}{2}\left(\omega_1 + C_2\right)\right]\right\},\ (C_1 < 0, \lambda > 0, C_2 \in R);$$

$$\ln\left\{\frac{2C_1C_2\ \exp\left(\sqrt{C_1}\ \omega_1\right)}{\lambda\left[1\text{-}C_2\ \exp\left(\sqrt{C_1}\ \omega_1\right)\right]}\right\},\quad (C_1 > 0, \lambda C_2 > 0);$$

$$-\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ \omega_1 + C\right)^2.$$

Отже, отримуємо наступну сім'ю розв'язків рівняння (4):

$$u=\ln\left\{\left(-\frac{h_1(\omega)}{2\lambda}\right)\sec^2\left[\frac{\sqrt{-h_1(\omega)}}{2}\left(x_3 + h_2(\omega)\right)\right]\right\},\ (h_1(\omega) < 0, \lambda > 0);$$

$$u = \ln\left\{\frac{2\,h_1(\omega)h_2(\omega)\ \exp\left(\sqrt{h_1(\omega)}\ x_3\right)}{\lambda\left[1 - h_2(\omega)\ \exp\left(\sqrt{h_1(\omega)}\ x_3\right)\right]}\right\},\ (h_1(\omega) > 0, \lambda h_2 > 0);$$

$$u=-\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ x_3 + h(\omega)\right)^2,$$

де $h_1(\omega), h_2(\omega), h(\omega)$ - довільні двічі диференційовні функції , ω - довільний розв'язок системи

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\ x_0^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\ x_{L+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2\omega}{\partial\ x_n^2} = 0\ , \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial\ \omega}{\partial\ x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\ \omega}{\partial\ x_{L+1}}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial\ \omega}{\partial\ x_n}\right)^2 = 0 \ .$$

Використовуючи, наприклад, розв’язок рівняння Ліувілля

$$u = \ln\frac{2(s-2)}{\lambda\ [\ x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_s^2]}\ , \qquad s \neq 2\,,$$

знаходимо широкий клас розв’язків цього рівняння

$$u = \ln\frac{2(s-2)}{\lambda\ [\ x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_L^2 - (x_{L+1} + h_{L+1}(\omega))^2 - \ldots - (x_s + h_s(\omega))^2]}\ ,$$

де ω - довільний розв’язок системи

$$\Box\omega_{s+1} = 0, \quad (\nabla\omega_{s+1})^2 = 0, \quad \nabla\omega_i \cdot \nabla\omega_{s+1} = 0, i = 1,2,\ldots,s.$$

а $h_{L+1}(\omega),\ldots,h_s(\omega)$ - довільні двічі диференційовні функції. Якщо $s = 3$, то рівняння (4) має в просторі $R_{1,3}$ наступну сім’ю розв’язків

$$u = \ln\frac{2}{\lambda\ [\ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + h_3(\omega))^2]}\ .$$

Для рівняння сінус-Гордона

$$\Box u + \sin u = 0$$

в аналогічний спосіб отримуємо наступні розв’язки

$$u = 4 arctg h_1(\omega) e^{\varepsilon_0 x_3} - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\pi, \quad \varepsilon_0 \quad \pm 1, \varepsilon \quad \pm 1,$$

$$u = 2\arccos[dn(x_3 + h_1(\omega), m)] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi,$$

$$u = 2\arccos[\mathrm{C}n(\frac{x_3 + h_1(\omega)}{m}, m)] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi, 0 < m < 1,$$

де $h_1(\omega)$ - довільна двічі диференційовна функція, ω - довільний розв’язок системи (5).

Розглянемо рівняння Ейконала

$$\left(\frac{\partial\ u}{\partial\ x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\ u}{\partial\ x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\ u}{\partial\ x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\ u}{\partial\ x_3}\right)^2 = 1. \qquad (6)$$

Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1)$, $\omega_1 \quad x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, редукує рівняння (6) до рівняння

$$4\omega_1 \left(\frac{\partial\ \varphi}{\partial\omega_1}\right)^2 - 1 = 0\,. \qquad (7)$$

Узагальнений анзац будемо шукати у вигляді $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$. Цей анзац редукує рівняння (6) до рівняння

$$4\omega_1 \left(\frac{\partial\ \varphi}{\partial\omega_1}\right)^2 + 2\left(\nabla\omega_1\ \nabla\omega_2\right)\ \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ \omega_1} + \left(\nabla\omega_2\right)^2 \left(\frac{\partial\ \varphi}{\partial\ \omega_2}\right)^2 = 1 \qquad (8)$$

Накладемо на рівняння (8) умову, щоб воно співпадало з редукованим рівнянням (7). Очевидно, ця умова буде виконуватись, якщо на змінну ω_2 накласти умови

$$(\nabla\omega_2)^2 = 0, \quad \nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega_1 = 0.$$

(9)

Розв'язавши систему (9), знаходимо явний вигляд змінної ω_2. Легко бачити, що довільна функція від розв'язку (9) є знову розв'язком системи (9).

Проінтегрувавши рівняння (7), знаходимо

$$(u + C)^2 = \quad x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

де C - довільна стала. Ми отримуємо більш загальну сім'ю розв'язків рівняння Ейконала, якщо C вважати довільним розв'язком системи (9).

Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \omega_2 = x_3,$ узагальнюється в такий спосіб. Нехай ω_3 - довільний розв'язок системи рівнянь

$$\left(\frac{\partial\ \omega_3}{\partial\ x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\ \omega_3}{\partial\ x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial\ x_2}\right)^2 = 0\ ,$$

$$x_0 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} = 0 \ .$$

Тоді рівняння $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ редукує рівняння Ейконала до рівняння

$$4\omega_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_2}\right)^2 = 1 \ . \qquad (10)$$

Рівняння (10) має розв’язки

$$\varphi = \frac{C_1^2 + 1}{2C_1} \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 \right)^{1/2} + \frac{C_1^2 - 1}{2C_1} x_3 + C_2,$$

$$\left(\varphi + C_2\right)^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \left(x_3 + C_1\right)^2 ,$$

які легко знайти методом симетрійної редукції рівняння (10) до звичайних диференціальних рівнянь. Замінивши довільні сталі C_1 і C_2 довільними функціями $h_1(\omega_3)$ і $h_2(\omega_3)$, одержимо більш широкі класи точних розв’язків рівняння Ейконала :

$$u = \frac{h_1(\omega_3)^2 + 1}{2h_1(\omega_3)} \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 \right)^{1/2} + \frac{h_1(\omega_3)^2 - 1}{2h_1(\omega_3)} x_3 + h_2(\omega_3) ,$$

$$\left(u + h_2(\omega_3)\right)^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \left(x_3 + h_1(\omega_3)\right)^2 \ .$$

Відзначимо, що оскільки рівняння Борна-Інфельда є диференціальним наслідком рівняння Ейконала, то цим побудовані також широкі класи точних розв’язків рівняння Борна-Інфельда.

Розглянемо наступне рівняння Еконала:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = -1 \ . \qquad (11)$$

Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1)$, $\omega_1 = x_3$, редукує рівняння (11) до рівняння

$$\dot{\varphi}^2 = 1 .$$

Редуковане рівняння має розв'язок $\varphi=\varepsilon x_3+\in$, $\varepsilon \quad \pm 1$, C - довільна стала. Замінивши сталу C довільною функцією $\mathrm{h}(\omega_2)$, де ω_2 - розв'язок рівняння

$$\left(\frac{\partial\ \mathrm{u}}{\partial\ \mathrm{x}_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\ \mathrm{u}}{\partial\ \mathrm{x}_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\ \mathrm{u}}{\partial\ \mathrm{x}_2}\right)^2 = 0 ,$$

одержимо більш загальну сім'ю розв'язків рівняння (11):

$$u=\varepsilon x_3+h(\omega_2) .$$

Висновки: використовуючи узагальнену симетрійну редукцію побудовані нові класи точних розв'язків рівнянь Ліувілля,сінус-Гордона і Ейконала. Одержані розвязки можуть бути використані у прикладних дослідженнях і стати ефективним інструментом перевірки адекватності математичних моделей.

Література

[1] Ovsiannikov L.V.,Group Analysis of Different Equations, Academi Press, 1982. - 400p.

[2] Olver J., Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer, New York, 1986. - 497p.

[3] Fushchych W.I., Shelten V.M. and Serov N.I., Symmetry Analysis and Exact of Equations of Nonlinear Mathematical Physics, Kluwer, Dordrecht, 1993. - 336p.

[4] Fushchych W.I., Tsyfra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. Gen.,* 1987, V.20, ^{1} 2, L45-L48.

[5] Levi D. and Winternitz P., *J. Phys. A,* 1989. V.22, ^{1} 2, 2915-2924.

[6] Barannyk A.F., Yuryk I.I. On some exact solutions of nonlinear wave equations,*Proceedings of the second International Conference « Symmetry in nonlinear mathematical Physics »* v. 1, 1997, 98-107.

[7] Barannyk A.F., Yuryk I.I. On a new method for costructing the exact solutions of the nonlinear differential equetions of mathematical physics, *J. Phys. A.: Math Gen. 31, 1998,c.4899-4907.*