І.І. Юрик А.С. Богатирчук

Національний університет
харчових технологій

Розширення групової симетрії диференціальних рівнянь гідродинаміки

Принцип симетрії відіграє значну роль у сучасних дослідженнях математичної фізики. Основні рівняння математичної і теоретичної фізики мають широку симетрію і саме ця властивість виділяє їх з усієї множини диференціальних рівнянь. Встановлення симетрійних властивостей рівнянь математичної фізики дозволяє дати загальну класифікацію їх розв'язків, що має широке застосування в різних розділах математики, механіки та фізики. Вивчення груп перетворень, відносно яких інваріантна фізична система, дає можливість отримати важливу інформацію без розв'язування рівнянь. Закони збереження, розмноження розв'язків, абзаци, розділення змінних — всі ці поняття і методи базуються на симетрій них властивостях диференціальних рівнянь. Більше того, виявляється, що всі відомі розв'язки, а також багато параметричні сімейства нових частинних розв'язків, можна отримати в рамках групового підходу.

Робота присвячена дослідженню симетрійних властивостей системи рівнянь, які описують рух рідини:

$$\begin{aligned} &\mathrm{D_t} u^k(t,x) + \rho^{-1}\nabla_k p(t,x) = 0 \\ &\mathrm{D_t}\rho(t,x) + \rho\nabla_k u^k(t,x) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \in R'$, $x \in R^n$, $k = 1,2...,n;$ $u^k(t,x) - k$ компонентна швидкість, p — тиск, ρ — густина, $\nabla_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t} + u^k\nabla_k$.

Припускаємо, що основні термодинамічні параметри середовища — тиск p, густина ρ і температура T зв'язані співвідношенням $p=\Phi(\rho,T)$, де $\Phi(\rho,T)$ — деяка гладка функція. Припускаємо також, що процес, який описується системою (1), або ізотермічний ($T=const$), або гомотермічний ($\nabla_k T=0$). Таким чином, T не залежить від просторових координат і рівняння стану можна записати у вигляді $p=F(\rho,t)$ з деякою функцією F.

Введемо такі позначення:

$u_{\mu}^{k}=\dfrac{\partial u^{k}}{\partial x^{\mu}}$, $\rho_{\mu}=\dfrac{\partial\rho}{\partial x^{\mu}}$, $p_k=\dfrac{\partial p}{\partial x^{k}}$, $x^{0}=t$.

Тоді, використовуючи рівняння стану система (1) приймає вигляд

$$\begin{aligned} &u_{o}^{k}+u^{j}u_{j}^{k}+\rho^{-1}F_{\rho}\rho_{k}=0,\\ &\rho_{0}+u^{j}\rho_{j}+\rho u_{j}^{j}=0, \end{aligned} \tag{2}$$

де $F_{\rho}=\dfrac{\partial F}{\partial\rho}$.

Для дослідження симетрії системи (2) використаємо інфінітезимальний метод С.Лі. Задача знаходження максимальної локальної групи точкових перетворень, які допускає система (2) зводиться до знаходження координат інфінітезимальних операторів, які породжують її однопараметричні підгрупи. У випадку системи (2) інфінітезимальний оператор симетрії знаходимо у вигляді

$$X=\xi^{\mu}(x,u,p)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+\eta^{k}(x,u,p)\frac{\partial}{\partial u^{k}}+\lambda(x,u,\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} \tag{3}$$

Діючи цим оператором на рівняння (2), отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. виключимо з цієї системи змінні u_0^k,ρ_0, отримаємо систему рівнянь в якій величини x^{α},u_j^k,ρ_j можна рахувати незалежними змінними. В результаті маємо таку систему

$$
\begin{aligned}
&\eta^k_{u^e} + \xi^l_k = 0, \quad \eta^k_{u^e} + \xi^k_l = 0, \quad k \neq l;\\
&\eta^j + u^j \xi^0_0 - \xi^j_0 - \sum_{i=0}^{n} \xi^j_i u_i = 0,\\
&\lambda_\rho + \rho^{-1}\lambda + \xi^k_k - \xi^0_0 - \eta^k_{u^k} = 0,\\
&\lambda_0 + \sum_{l=1}^{n}\left(u^e \lambda_e + \rho u^l_l\right) = 0;
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
2F_\rho\left(\xi^0_0 - \xi^k_k\right) + F_{\rho\rho}\lambda + F_{0\rho}\xi^0 = 0, \tag{5}
$$

де $\xi^0 = \xi^0\left(x^0\right), \xi^k = \xi^k\left(x\right), \eta^k = \eta^k\left(x,u\right), \lambda = \lambda\left(x,u,\rho\right).$

Знаходимо розв’язки системи (4):

$$
\begin{aligned}
&\xi_0 = \chi x_0^2 + \gamma x_0 + \alpha, \quad \lambda = \left[c - \frac{n}{2}\dot{\xi}^0\left(x_0\right)\right]\rho,\\
&\xi^k = \left[\frac{1}{2}\dot{\xi}^0\left(x^0\right) + \delta\right]x^k + \mu^k x^0 + \sum_{l=1}^{n} a^k_e x^l + \nu^k,\\
&\eta^k = \chi x^k + \mu^k + \sum_{l=1}^{n} Q^k_l u^l + \left[\delta - \frac{1}{2}\dot{\xi}^0 x^0\right]u^k,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

де $\dot{\xi}^0\left(x^0\right) = d\xi^0\left(x^0\right)/dx^0, \quad a^k_e = -a^l_k, c, \chi, \alpha, \delta, \gamma, \mu^k, \nu^k$ — зовнішні параметри.

Підставимо ці розв’язки в рівняння (5). Одержимо

$$
\left[\frac{n}{2}\dot{\xi}\left(x^0\right) - c\right]\varphi_\rho - \xi^0\varphi_0 = \left[\dot{\xi}^0\left(x_0\right) - 2\delta\right]\varphi, \tag{7}
$$

де $\varphi\left(\rho,t\right) = F_\rho\left(\rho,t\right)$.

Параметри $a^k_e, \mu^k, \nu^k \left(\alpha \text{ при } \varphi_0 = 0\right)$ не входять в систему ,(7), тому при довільній функції $F\left(\rho,t\right)$ системи (4), (5) має розв’язок

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = 0, \quad \xi^k = \sum_{j=1}^{n} a^k_j x^j + \mu^k x_0 + \nu^k\\
&\eta^k = \sum_{j=0}^{n} a^k_j u^j + \mu^k, \quad a^k_j = -a^j_k,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

а при $F_\rho = \varphi(\rho)$ — розв'язок з $\xi^0 = \alpha = const$. Функції ξ^0, ξ^k, η^k відповідають диференціальним операторам:

$$
\begin{aligned}
&P_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, G_k = x_0 \frac{\partial}{\partial x^n} + \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&I_{kr} = x_k \frac{\partial}{x^r} - x_r \frac{\partial}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial}{\partial u^r} - u^r \frac{\partial}{\partial u^k},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

які за загальною теорією $[1]$ утворюють алгебру Лі. Крім того, оператори (9) разом з $P_0 = \dfrac{\partial}{\partial x^0}$ утворюють алгебру Лі групи Галілея.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема. При довільній функції $F_\rho = \varphi(\rho, t)$ система рівнянь (2) допускає $\dfrac{n(n+3)}{2}$ параметричну групу перетворень, алгебра Лі якої породжується операторами (9), а у випадку $F_\rho = \varphi(\rho)$ дана система допускає групу Галілея $G(n)$.

Виявляється, що для деяких функцій F симетрія системи (2) на багато ширша. Нами знайдено всі випадки такого розширення. Відповідні функції $F_\rho = \varphi$, а також множина інфінітезимальних операторів симетрії, які допускає система (2) перераховані в таблиці.

Таблиця

$\varphi = F_\rho$	x
$\varphi_1 = M\rho^{2/n}$	$x_1 = \alpha P_0 + \gamma L_1 + \delta L_2 + n\left(\delta - \frac{\gamma}{2}\right) L_3 + \chi L_0,$ $L_0 = x_0^2 \frac{\partial}{\partial x^0} + x_0 x_k \frac{\partial}{\partial x^k} + \left(x^k - x^0 u^k\right) \frac{\partial}{\partial u^k} + (-1)^n x_0 \rho \frac{\partial}{\partial \rho},$ $L_1 = x_0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{2} x_k \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{1}{2} u^k \frac{\partial}{\partial u^k},$ $L_2 = x_k \frac{\partial}{x^k} + u^k \frac{\partial}{\partial u^k}, \; L_3 = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad P_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}$

$\varphi_2 = M\rho^{\chi}$	$x_2 = \alpha P_0 + \gamma L_1 + \delta L_2 + \frac{2}{\chi}\left(\delta - \frac{\gamma}{2}\right)L_3 \quad \chi \neq 0$
$\varphi_3 = M x_0^{\sigma}\rho^{\chi}$	$x_3 = \gamma L_1 + \delta L_2 + \left[\frac{2}{\chi}\left(\delta - \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\sigma}{\chi}\lambda\right]L_3, \quad \chi \neq 0$
$\varphi_4 = \rho^{2/n}G(j)$, $j = \rho^{2/n}x_0^{\sigma}$	$x_4 = \gamma L_1 + \frac{k}{n}\gamma L_2 + n\gamma\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)L_3,$ $\sigma = 1 - \frac{2k}{n}.$
$\varphi_5 = M x_0^{\sigma}$	$x_5 = \gamma L_1 + \frac{\sigma + 1}{2}\gamma L_2 + \left(\mu - \frac{n}{2}\lambda\right)L_3$
$\varphi_6 = x_0^{-1}G(\rho)$	$x_6 = \lambda L_1$
$\varphi_7 = \Phi\left(\rho^{2/n}x_0^{\sigma}\right)$	$x_7 = \gamma L_1 + \frac{\gamma}{2}L_2 + n\frac{\sigma}{2}\gamma L_3, \quad \sigma = 1 - \frac{2k}{n}$
$\varphi_8 = e^{\sigma x_0}\Phi(\rho)$	$x_8 = \alpha P_0 + \frac{\sigma}{2}\alpha L_2$
$\varphi_9 = \Phi\left(\rho^{2/n}e^{-\sigma x_0}\right)$	$x_9 = \alpha P_0 + \frac{n\sigma}{2}\alpha L_3$
$\varphi_{10} = \Phi(\rho)x_0^{\sigma}$	$x_{10} = \gamma\left(L_1 + \frac{\sigma + 1}{2}L_2\right)$
$\varphi_{11} = \Phi(\rho)$	$x_{11} = \alpha P_0 + \gamma\left(L_1 + \frac{1}{2}L_2\right)$
$\varphi_{12} = \rho^{k}\Phi(x_0)$	$x_{12} = \delta\left(L_3 + \frac{k}{2}L_2\right)$

Звідки відомо, що для всіх рівнянь стану, які допускають розширення симетрії, крім випадку $\varphi = \varphi_1 = MP^{2/n}$ довільна однопараметрична група інваріантності рівняння (1) породжується оператором вигляду

$$X = \left(\alpha + \lambda x_0\right)\frac{\partial}{\partial x^0} + \left(Ax^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k} + Bu^k\frac{\partial}{\partial u^k} + L\rho\frac{\partial}{\partial \rho},$$

який при $\alpha = 0$ називається генератором масштабних перетворень. Розв'язки, які інваріантні відносно цього оператора називаються автомодельними, $[1,2]$.

Отже, маємо теж твердження.

Теорема. Розширення симетрії системи (2) можливі тільки у випадках, які наведені в таблиці. Максимальною групою інваріантності є $\frac{n(+3)}{2}+4$ — параметрична проективна група, яка допускається системою (2) тоді і тільки тоді, коли $F_{\rho} = c\rho^{2/n}$.

Слід відмітити, що одномірний випадок є особливим, оскільки перші два рівняння в системі (4) з'являються тільки при $n > 1$ і як було показано в роботі $[3]$ для рівняння стану $p = \frac{M}{3}\rho^{3}$ система (2) при $n = 1$ допускає нескінченну групу симетрії. Це дало можливість отримати загальний розв'язок.

Висновок. Знайдено всі розширення алгебри симетрії системи рівнянь, які описують рух рідини. Проведена повна групова класифікація рівняння стану, яке дає зв'язок між термодинамічними параметрами середовища. Це в свою чергу дасть можливість отримати нові точні розв'язки системи рівнянь (1), що і буде предметом наших наступних досліджень.

Література

1. Овсянников Л.В. Груповой аналіз диференциональьных уравнений. – М.: Наука, 1987.-400с.
2. Новиков В.Д., Юрик И.И., Владимиров В.А. Автомодельные решения задачи о тотечном взрыве в воде. – К., 1984.-23с.- (Препринт АН УССР. Ин-т кибернетики).
3. Фущич В.И., Серов М.М. О максимальной группе инвариантности и общее решение одномерных уровнений газовой динамики. - Докл. АН СССР, 1983, 268, №5, с.1162-1164.