ПОНЯТТЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Ольга Островська, Іван Юрик
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
i.yu@ukr.net

Тема неперервності функції в точці і на відрізку вимагає достатньої уваги з методичної сторони. Починати її потрібно з означення умов існування границі функції в точці. Для цього спочатку дається поняття лівої і правої границі функції в точці. Потім після відповідних міркувань, рисунків, вказується, що функція має границю в точці $x = x_0$, якщо: в околі точки x_0 функція визначена; існує ліва і права границя в цій точці й обидві границі рівні між собою. У студентів виникають сумніви щодо користі лівої і правої границі, оскільки вони часто рівні і більш того, вони пропонують, що простіше порахувати значення функції в даній точці. Усі ці уявлення природні, оскільки в свідомості початківців функція уявляється як неперервна функція. Цю ситуацію бажано використати і відразу показати, що насправді є глибокий сенс у тому, щоб відрізняти ліву і праву границі. На відповідних прикладах розривних функцій студенти повинні побачити, що в особливих випадках $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ або, що одна з цих границь, а може й обидві не існують, що і визначає, так званий, розрив функції.

Конкретний фізичний приклад розриву функції можна показати на графіку теплоємності тіла під час нагрівання. Цей графік розірваний у точках, які відповідають переходам тіла з твердого стану в рідкий і з рідкого в газоподібний. Слід навести також приклад розриву функції, яка виражає закон розподілу нерівномірного навантаження вздовж довжини стрижня у випадку, коли одна частина стрижня несе одне навантаження, а друга частина інше.

Після прикладів викладач звертає увагу на те, що в закономірному процесі зміни функції розриви займають особливе місце, оскільки в точках розриву різко порушується хід зміни функції. Природно, тому поставити питання про умови при яких функція $f(x)$ в заданій точці $x = x_0$ буде неперервною. Такі умови зручно виразити такими вимогами:

1) функція повинна бути визначена не тільки в деякому околі точки $x = x_0$, але і в самій точці;

2) вимагається, щоб ліва і права границі функції існували і в точці x_0 були рівними між собою, тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$;

3) вимагається, щоб $f(x_0) = A$. Перерахуванням цих умов слід і обмежитись. Наводити додатково означення неперервності функції за Коші не має змісту в умовах технічного вузу. Вказані вимоги чітко виражають характеристику неперервної функції. Ці вимоги зручні також для визначення характеру розриву. Особливу увагу потрібно звернути на першу умову, оскільки точками розриву елементарних функцій як раз є ті точки, в яких функція невизначена.

Дослідженням випадків, коли перша і третя умови не виконуються приводять до поняття усувного розриву: шляхом переозначення функції (поверненням вилученої точки на графік), якщо не виконується тільки третя умова; шляхом доозначення функції, тобто приписуванням їй значення A при $x = x_0$, якщо не виконується тільки перша умова. На практиці важливо виразити ці умови в термінах нескінченно малих приростів Δx і Δy аргументу і функції. Зручно ці умови виразити так: функція $f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$, якщо вона визначена не тільки в деякому околі цієї точки, але й в самій точці і також нескінченно малому приросту Δx аргументу x відповідає нескінченно малий приріст Δy самої функції, незалежно від того, яким чином приріст аргументу наближається до нуля. Умова незалежності способу наближення приросту аргументу до нуля суттєва. Нею визначаються умови наявності у неперервної функції двосторонньої границі. Тому не згадати цю добавку, як це інколи роблять, неможна. Також неможна не згадати і першу умову, що часто зустрічається. Умови неперервності функції в точці в термінах лівої і правої границі приводять до важливої властивості функції, яка виражається рівністю

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Важливість цієї властивості стає зрозумілою після того, як тільки студентам показано, що вона застосовується до всіх елементарних функцій. Звичайно, показавши, що всі основні елементарних функцій неперервні. Далі доводяться теореми про неперервність суми, добутку і частки неперервних функцій, а також про неперервність складеної функцій. Наслідком цього є така теорема: *«Усі елементарні функції неперервні в точках, де вони визначені»*.

Далі слід зупинитись на властивостях неперервних функцій на проміжку, дати чітке означення неперервної функції на інтервалі і відрізку. Функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. Функція називається неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній внутрішній точці цього відрізку і крім того, $f(a) = f(a+0)$, $f(b) = f(b-0)$. Після цього сформулювати теореми Вейєрштрасса і Больцано — Коші: неперервна функція на відрізку обмежена і досягає свого найбільшого і найменшого значення; якщо неперервна функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ набуває на його кінцях значення $f(a)$ і $f(b)$, то вона набуває будь-яке значення між ними; якщо неперервна на $[a,b]$ функція $f(x)$ набуває на його кінцях значення різних знаків, то в середині проміжку знайдеться точка, в якій функція дорівнює нулеві. Рекомендуємо всі ці твердження проілюструвати на графіках функцій, оскільки їх доведення в загальному випадку є складним. Нарешті, слід відмітити, що неперервна функція не обов'язково гладка, тобто її графік не всюди має дотичну. Вона може бути кусково-гладкою, графік її складається з декількох гладких дуг і може мати злами.

ПОНЯТТЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Ольга Островська, Іван Юрик
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
i.yu@ukr.net

Тема неперервності функції в точці і на відрізку вимагає достатньої уваги з методичної сторони. Починати її потрібно з означення умов існування границі функції в точці. Для цього спочатку дається поняття лівої і правої границі функції в точці. Потім після відповідних міркувань, рисунків, вказується, що функція має границю в точці $x = x_0$, якщо: в околі точки x_0 функція визначена; існує ліва і права границя в цій точці й обидві границі рівні між собою. У студентів виникають сумніви щодо користі лівої і правої границі, оскільки вони часто рівні і більш того, вони пропонують, що простіше порахувати значення функції в даній точці. Усі ці уявлення природні, оскільки в свідомості початківців функція уявляється як неперервна функція. Цю ситуацію бажано використати і відразу показати, що насправді є глибокий сенс у тому, щоб відрізняти ліву і праву границі. На відповідних прикладах розривних функцій студенти повинні побачити, що в особливих випадках $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ або, що одна з цих границь, а може й обидві не існують, що і визначає, так званий, розрив функції.

Конкретний фізичний приклад розриву функції можна показати на графіку теплоємності тіла під час нагрівання. Цей графік розірваний у точках, які відповідають переходам тіла з твердого стану в рідкий і з рідкого в газоподібний. Слід навести також приклад розриву функції, яка виражає закон розподілу нерівномірного навантаження вздовж довжини стрижня у випадку, коли одна частина стрижня несе одне навантаження, а друга частина інше.

Після прикладів викладач звертає увагу на те, що в закономірному процесі зміни функції розриви займають особливе місце, оскільки в точках розриву різко порушується хід зміни функції. Природно, тому поставити питання про умови при яких функція $f(x)$ в заданій точці $x = x_0$ буде неперервною. Такі умови зручно виразити такими вимогами:

1) функція повинна бути визначена не тільки в деякому околі точки $x = x_0$, але і в самій точці;

2) вимагається, щоб ліва і права границі функції існували і в точці x_0 були рівними між собою, тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$;

3) вимагається, щоб $f(x_0) = A$. Перерахуванням цих умов слід і обмежитись. Наводити додатково означення неперервності функції за Коші не має змісту в умовах технічного вузу. Вказані вимоги чітко виражають характеристику неперервної функції. Ці вимоги зручні також для визначення характеру розриву. Особливу увагу потрібно звернути на першу умову, оскільки точками розриву елементарних функцій як раз є ті точки, в яких функція невизначена.

Дослідженням випадків, коли перша і третя умови не виконуються приводять до поняття усувного розриву: шляхом переозначення функції (поверненням вилученої точки на графік), якщо не виконується тільки третя умова; шляхом доозначення функції, тобто приписуванням їй значення A при $x = x_0$, якщо не виконується тільки перша умова. На практиці важливо виразити ці умови в термінах нескінченно малих приростів Δx і Δy аргументу і функції. Зручно ці умови виразити так: функція $f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$, якщо вона визначена не тільки в деякому околі цієї точки, але й в самій точці і також нескінченно малому приросту Δx аргументу x відповідає нескінченно малий приріст Δy самої функції, незалежно від того, яким чином приріст аргументу наближається до нуля. Умова незалежності способу наближення приросту аргументу до нуля суттєва. Нею визначаються умови наявності у неперервної функції двосторонньої границі. Тому не згадати цю добавку, як це інколи роблять, неможна. Також неможна не згадати і першу умову, що часто зустрічається. Умови неперервності функції в точці в термінах лівої і правої границі приводять до важливої властивості функції, яка виражається рівністю

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Важливість цієї властивості стає зрозумілою після того, як тільки студентам показано, що вона застосовується до всіх елементарних функцій. Звичайно, показавши, що всі основні елементарних функцій неперервні. Далі доводяться теореми про неперервність суми, добутку і частки неперервних функцій, а також про неперервність складеної функцій. Наслідком цього є така теорема: *«Усі елементарні функції неперервні в точках, де вони визначені»*.

Далі слід зупинитись на властивостях неперервних функцій на проміжку, дати чітке означення неперервної функції на інтервалі і відрізку. Функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. Функція називається неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній внутрішній точці цього відрізку і крім того, $f(a) = f(a+0)$, $f(b) = f(b-0)$. Після цього сформулювати теореми Вейєрштрасса і Больцано — Коші: неперервна функція на відрізку обмежена і досягає свого найбільшого і найменшого значення; якщо неперервна функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ набуває на його кінцях значення $f(a)$ і $f(b)$, то вона набуває будь-яке значення між ними; якщо неперервна на $[a,b]$ функція $f(x)$ набуває на його кінцях значення різних знаків, то в середині проміжку знайдеться точка, в якій функція дорівнює нулеві. Рекомендуємо всі ці твердження проілюструвати на графіках функцій, оскільки їх доведення в загальному випадку є складним. Нарешті, слід відмітити, що неперервна функція не обов'язково гладка, тобто її графік не всюди має дотичну. Вона може бути кусково-гладкою, графік її складається з декількох гладких дуг і може мати злами.