

Про точні розв'язки рівняння $u_t = h_1(u)u_{xx} + h_2(u)u_x + h_3(u)$,

Іван Юрик

Робота присвячена побудові точних розв'язків нелінійного рівняння дифузії

$$u_t = h_1(u)u_{xx} + h_2(u)u_x + h_3(u), \quad 1)$$

де $u = u(t, x)$ – гладка функція, u_t , u_x – похідні по відповідним змінним, $h_1(u) = \beta_0 + \beta_1 u$, $h_2(u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2$, $h_3(u) = a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0$ є ненульовими многочленами з дійсними коефіцієнтами, степені яких не перевищують 1, 2, 4 відповідно. Рівняння (1) є узагальненням класичного рівняння Бюргерса $u_t = u_{xx} + \mu u u_x$, а також відомих рівнянь Фішера $u_t = u_{xx} + u(1-u)$ і Марі $u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + a_2 u^2 + a_1 u$, які використовуються в сучасній математичній біології. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1) є алгебра Лі, яка породжена операторами

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

У випадку $h_1(u) = 0$, $h_2(u) = 0$, $h_3(u) = a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0$, $a_3 \neq 0$ рівняння має нетривіальну Q -умовну симетрію, що дає можливість побудувати деякі класи точних розв'язків такого рівняння [1, 2]. У даній роботі ці розв'язки узагальнюються на випадки рівняння (1). Для цього ми використовуємо підстановку Коула–Хопфа

$$u = k \frac{z_x}{z}, \quad 2)$$

де k – стала, $z = z(x, t)$. Ця підстановка зводить задачу знаходження функції $z = z(x, t)$, а отже, і розв'язків рівняння (1), до інтегрування системи двох лінійних рівнянь. В роботі [3] з'ясовано, для яких параметрів $\beta_0, \beta_1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ рівняння (1) має розв'язки вигляду (2).

Використовуючи цей результат нами побудовані нові точні розв'язки рівняння (1).

Література

1. Фушич В.І., Серов М.І. Умовна інваріантність і редукція нелінійного рівняння теплопровідності // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 7. – С. 24–28.
2. Clarkson P.A. Symmetry reduction and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. – 1990. – Vol. 70. – P. 250–288.
3. Юрик І.І. Про нелінійські розв'язки нелінійного рівняння реакції–дифузії // Доповіді НАН України. Сер. А. – 2004. – № 12. – С. 3–8.

i.yu@ukr.net