УДК 621.313

Циганкова Г.А., канд. техн. наук
Національний університет харчових технологій, вул. Володимирська, 68, Київ-33, 01033, Україна
Цыганкова А.А., канд. техн. наук
Национальный университет пищевых технологий, ул. Владимирская, 68, Киев-33, 01033, Украина
Tsygankova G. A.
National University of Food Technologies, Volodymyrska str., 68, Kyiv-33, 01033, Ukraine

РОЗРАХУНОК МАГНІТНОГО ПОЛЯ В РОБОЧІЙ ЗОНІ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНОГО ГАЛЬМА ПРИ НЕРУХОМОМУ РОТОРІ
РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В РАБОЧЕЙ ЗОНЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ТОРМОЗА ПРИ НЕПОДВИЖНОМ РОТОРЕ
CALCULATING OF MAGNETIC FILD IN A WORKING ZONE OF AN ELECTRODYNAMIC BRAKE WITH STATIC ROTOR

Приведені результати розрахунку кутової та осьової компонент вектора напружeності магнітного поля для різних значень відносної магнітної проникності матеріалу диску. Показано, що в робочій зоні електродинамічного гальма на поверхні диску радіальна компонента вектора напружeності магнітного поля відсутня, а кутовою компонентою, при відносній магнітній проникності матеріалу диску більшій 10, можна знехтувати. Бібл. 4, рис. 3.

Приведены результаты расчета угловой и осевой компонент вектора напряженности магнитного поля для различных значений относительной магнитной проницательности материала диска. Показано, что в рабочей зоне электродинамического тормоза на поверхности диска радиальная компонента вектора напряженности магнитного поля отсутствует, а угловой компонентой, при относительной магнитной проницательности материала диска большей 10, можно пренебречь. Библ. 4, рис. 3.

The results of the calculation of the angular and axial vector components of the magnetic field for different values of the relative magnetic permeability disc material are given. It is shown that in the working area of the electrodynamic brake on the surface of the disk a radial component of the vector of intensity of magnetic field is absent, and the angular component, at a relative magnetic permeability of the disc material more than 10, can be neglected. References 4, figures 3.

Ключові слова: *електродинамічне гальмо, напруженість магнітного поля, магнітний потенціал.*

Ключевые слова: *электродинамический тормоз, напряженность магнитного поля, магнитный потенциал.*

Key words: *electrodynamics brake, intensity of a magnetic field, magnetic potential.*

Задача знаходження струмів і зусиль в диску електродинамічного гальма [3] в залежності від заданої амплітуди гармонічної складової магнітної індукції, розмірів, швидкості обертання та параметрів матеріалу ротора потребує спочатку розв’язання рівнянь електромагнітного поля для нерухомого (V=0) диску, а потім узагальнення для диску, що обертається. Розглянемо першу частину цієї задачі.

Об’єкти та методи дослідження

Розглядаємо розрахункову модель магнітного поля робочої зубчатої зони електродинамічного гальма, згідно описаній в [4], в якій приймаємо, що магнітне поле повітряного проміжку між двома півпросторами з нескінченною магнітною проникністю (рис. 1) при нерухомому диску збуджується системою уявних провідників з постійним струмом I, розподілених симетрично на поверхнях цих півпросторів.

Постановка завдання

Рівняння для визначення параметрів магнітного поля для нерухомого диску при збудженні поля постійним струмом витікає з системи рівнянь Максвелла [2]:

$$rot\vec{H} = 0 \tag{1}$$

$$rot\vec{E} = 0 \tag{2}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$div\vec{\delta} = 0 \tag{4}$$

$$\vec{\delta} = 0 \tag{5}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}\ , \tag{6}$$

де $\vec{H}$ – вектор напруженості магнітного поля в диску; $\vec{\delta}$ – вектор густини струму; $\vec{E}$ – вектор напруженості електричного поля; $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції; μ – магнітна проникність матеріалу.

Знайдемо компоненти напруженості магнітного поля в робочій зоні електродинамічного гальма та граничні умови, необхідні для розв’язання цієї системи рівнянь. Будемо використовувати циліндричну систему координат.

Результати та їх обговорення

Оскільки при нерухомому диску струми в ньому відсутні, магнітне поле може характеризуватись скалярною величиною – магнітним потенціалом u_m, причому:

$$\vec{H} = -gradu_m \tag{7}$$

Для однорідного ізотропного середовища магнітний потенціал задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u_m}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}=0 \tag{8}$$

Застосувавши відомий метод Фурьє, рішення цього рівняння будемо шукати у вигляді добутку трьох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної : R залежить від координати *r*, Ψ залежить від координати φ, Z залежить від координати *z*.

$$u_m = R\cdot\Psi\cdot Z \tag{9}$$

Тоді функція Z буде мати вигляд

$$Z=\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_i chk_i z + G_i shk_i z\right), \tag{10}$$

де A_i, G_i – невідомі коефіцієнти,
функція Ψ буде мати вигляд

$$\Psi=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos l_n\varphi + N_n \sin l_n\varphi\right), \tag{11}$$

де C_n, N_n – невідомі коефіцієнти,

а функція R є розв’язком рівняння Бесселя $$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial R}{\partial r}+\left(K-\frac{L}{r^2}\right)R=0\ , \tag{12}$$

де *K* і *L* – сталі величини.

Враховуючи відсутність поля при $r=0$, рішення R є сумою функцій Бесселя лише першого роду:

$$R=\sum_n\sum_i D_i J_{l_n}(k_i r) \tag{13}$$

Коефіцієнти A_i, G_i, C_n, N_n, та D_i знаходяться із граничних умов, які визначаються струмами і розглядаються далі.

Компоненти вектора напруженості магнітного поля визначаються рівняннями:

$$H_r=-\Psi\cdot Z\cdot\frac{\partial R}{\partial r} \tag{14}$$

$$H_{\varphi} = -R \cdot Z \cdot \frac{\partial \Psi}{r \partial \varphi} \tag{15}$$

$$H_{z} = -R \cdot \Psi \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \tag{16}$$

Радіальна компонента напруженості магнітного поля H_r при $z = \frac{d}{2} = \frac{d_з}{2} + \frac{d_\partial}{2}$ визначається щільністю Is_{φ} (ампер-витками) (рис. 1). На рисунку 1 d_∂ – товщина диску, $d_з$ – ширина повітряного проміжку, r – радіус точки спостереження, μ та σ – магнітна проникність та електропровідність матеріалу диску.

Оскільки контур $b'-g'-g-b-b'$ (рис. 1*а*) охоплює струм $-Is_{\varphi}\Delta r$, а відстань $g'-g \to 0$ та $b-b' \to 0$ і напруженість магнітного поля в середовищі з нескінченною магнітною проникністю дорівнює нулю, то $-Is_{\varphi}\Delta r = H_r \Delta r$. Звідки

$$H_r\left(z = \frac{d}{2}\right) = -Is_{\varphi} \tag{17}$$

Компонента напруженості магнітного поля в кутовому напрямку H_{φ} визначається щільністю Is_r. Оскільки аналогічний контур $b'-g'-g-b-b'$ (рис. 1*б*) охоплює струм $Is_r r\Delta\varphi$ і $Is_r r\Delta\varphi = H_{\varphi} r \Delta\varphi$, то:

$$H_{\varphi}\left(z = \frac{d}{2}\right) = Is_r \tag{18}$$

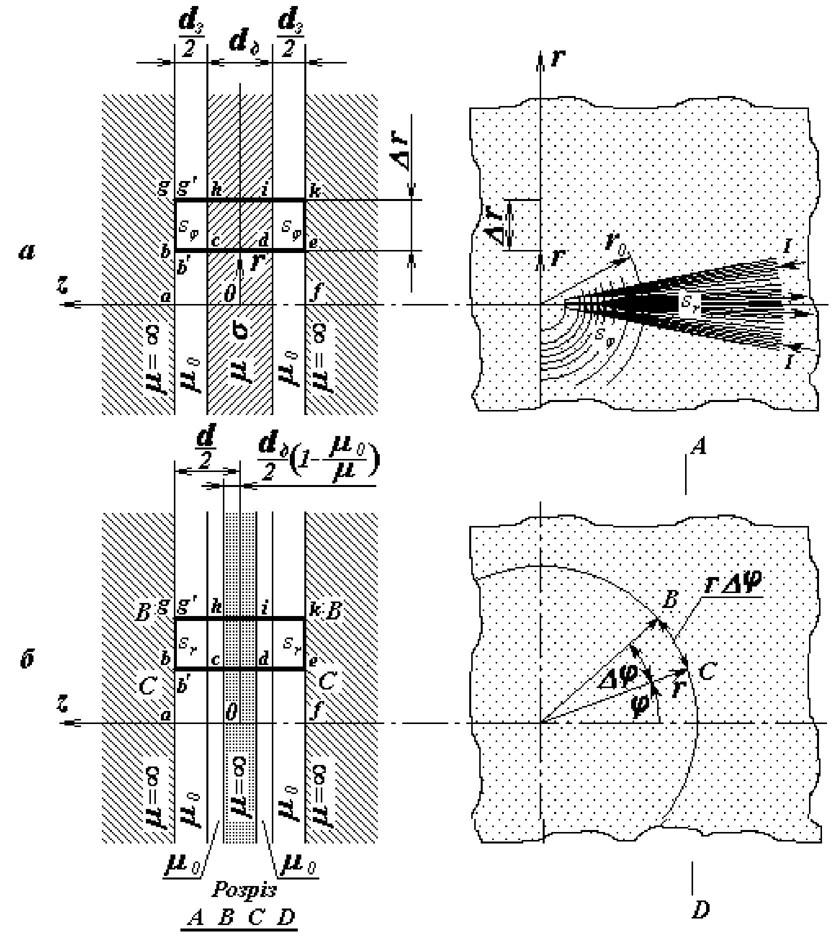

Рис. 1.

Із (14), (17) можемо знайти:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(R\cdot Z\left(\frac{d}{2}\right)\right)\cdot\Psi=-Is_{\varphi} \tag{19}$$

Звідки

$$R\cdot Z\left(\frac{d}{2}\right)=\frac{\int\limits_0^r Is_{\varphi}\partial r}{\Psi} \tag{20}$$

Із (15), (18) можемо знайти:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\cdot R\cdot Z\left(\frac{d}{2}\right)=Is_r \tag{21}$$

Підставивши (20) у (21), знайдемо:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}+\frac{rs_r}{\int\limits_0^r s_{\varphi}\partial r}\Psi=0\quad. \tag{22}$$

Як і в [4] будемо вважати, що обрано спеціальні закони розподілу щільності провідників зі струмом $s_{\varphi}=-\sum\limits_i\frac{\partial A_i J_p(k_i r)}{\partial r}\cdot\sin p\varphi$ і $s_r=\frac{p}{r}\sum\limits_i A_i J_p(k_i r)\cos p\varphi$, для яких виконується рівність $\frac{rs_r}{\int\limits_0^r s_{\varphi}\partial r}=-p\frac{\cos p\varphi}{\sin p\varphi}$. В цьому випадку розв’язок рівняння (22) має вигляд:

$$\Psi=\sin p\varphi. \tag{23}$$

Тобто, залежність магнітного потенціалу від кутової координати має лише одну гармонічну складову з числом пар полюсів *p*, а значить залежність магнітного потенціалу від радіальної координати виражається комбінацією функцій Бесселя лише одного порядку *p* з різними коефіцієнтами k_i при радіальній і осьовій координатах.

Враховуючи викладене, при вказаних умовах рішення для магнітного потенціалу буде мати вигляд:

$$u_m=\sum_{i=1}^{\infty}D_i J_p(k_i r)G_i sh(k_i z)\sin p\varphi. \tag{24}$$

Тобто, в загальному випадку магнітний потенціал не може бути виражений добутком незалежних функцій від *r* та *z*, а лише сумою добутків функцій з однаковими сталими k_i.

Сталі величини D_i, G_i та k_i визначаються через компоненти напруженості магнітного поля згідно закону розподілу радіальної [4, (2)] та кутової [4, (1)] компонент поверхневого струму *I*, розміщеного на границі середовища з нескінченною магнітною проникністю та повітряного проміжку і збуджуючого це поле. Зазначимо, що в [4] закон розподілу компонент поверхневого струму задавався сумами шести функцій Бесселя з певним чином підібраними коефіцієнтами A_i та k_i.

Таким чином, виходячи із (24), радіальна, кутова та осьова компоненти вектора напруженості магнітного поля, мають вигляд відповідно:

$$H_r=-\frac{\partial u_m}{\partial r}=-\sum_{i=1}^{\infty}C_i\frac{\partial J_p(k_i r)}{\partial r}\cdot G_i sh(k_i z)\sin p\varphi \tag{25}$$

$$H_{\varphi}=-\frac{\partial u_m}{r\partial\varphi}=-\frac{p}{r}\sum_{i=1}^{\infty}C_i J_p(k_i r)G_i sh(k_i z)\cos p\varphi \tag{26}$$

$$H_z=-\frac{\partial u_m}{\partial z}=-\sum_{i=1}^{\infty}C_i J_p(k_i r)k_i G_i ch(k_i z)\sin p\varphi \tag{27}$$

Враховуючи симетричне відносно *z*=0 розташування поверхневих струмів, можна прийняти $u_m(r,\varphi,0)=0$ та розглядати лише зони з додатнім значенням координати z.

Для розрахунку магнітного потенціалу в повітряному проміжку необхідно, щоб середовище було однорідним. Тому замінимо диск з магнітною проникністю μ диском з $\mu=\infty$ і додатковим повітряним проміжком так, що диск товщиною d_∂ і магнітною проникністю μ стає диском товщиною $d_\partial(1-\dfrac{\mu_0}{\mu})$ (з $\mu=\infty$) і повітряним проміжком $d_\partial\dfrac{\mu_0}{\mu}$ з магнітною проникністю μ_0. При цьому система координат $Ozr\varphi$ переходить до системи $O_з z_з r\varphi$ з однорідним проміжком і початок координат переходить в $z_з = z-\left(1-\dfrac{\mu_0}{\mu}\right)\dfrac{d_\partial}{2}$ (рис.1б). Тоді в інтервалі $\dfrac{d_\partial}{2}\le z\le \dfrac{d_з+d_\partial}{2}$ можемо записати:

$$u_{mз}=\sum_i D_i J_p(k_i r)G_{зi}sh(k_i z_з)\sin p\varphi\,, \tag{28}$$

а в інтервалі $0<z\le\dfrac{d_\partial}{2}$

$$u_{m\partial}=\sum_i D_i J_p(k_i r)G_{\partial i}sh(k_i z)\sin p\varphi\,. \tag{29}$$

Коефіцієнти $G_{зi}$ та $G_{\partial i}$ знайдемо із умови рівності магнітного потенціалу по обидві сторони межі між повітряним проміжком і диском: $u_{mз}\left(r,\varphi,z_з=\dfrac{\mu_0}{\mu}\dfrac{d_\partial}{2}\right)=u_{m\partial}\left(r,\varphi,z=\dfrac{d_\partial}{2}\right)$.

Оскільки функція Z безрозмірна, то можна накласти умову, що при $z=\dfrac{d}{2}$ вона дорівнює 1:

$$G_{зi}sh\left(k_i\left(\frac{d_з}{2}+\frac{\mu_0}{\mu}\frac{d_\partial}{2}\right)\right)=1 \quad \text{або} \quad G_{зi}=\frac{1}{sh\left(k_i\left(\frac{d_з}{2}+\frac{\mu_0}{\mu}\frac{d_\partial}{2}\right)\right)}\,. \tag{30}$$

При цьому коефіцієнт $G_{\partial i}$ в зоні диску буде дорівнювати:

$$G_{\partial i}=\frac{sh\left(k_i\left(\frac{\mu_0}{\mu}\frac{d_\partial}{2}\right)\right)}{sh\left(k_i\left(\frac{d_з}{2}+\frac{\mu_0}{\mu}\frac{d_\partial}{2}\right)\right)\cdot sh\left(k_i\frac{d_\partial}{2}\right)} \tag{31}$$

При умові (30) та [4, (2)] на поверхні диску при $z=\dfrac{d}{2}=\dfrac{d_з}{2}+\dfrac{d_\partial}{2}$ із (18) та (26) отримаємо:

$$\begin{aligned}&-\frac{p}{r}\sum_{i=1}^{\infty}A_i J_p(k_i r)1\cdot\cos p\varphi=\\&=IW_0\frac{16}{r}\begin{pmatrix}0{,}4J_{16}(0{,}45r)+1{,}06J_{16}(0{,}4r)+1{,}62J_{16}(0{,}355r)+\\+1{,}56J_{16}(0{,}32r)+3{,}64J_{16}(0{,}2708r)+2{,}92J_{16}(0{,}22r)\end{pmatrix}\cdot\cos 16\varphi\end{aligned}\,, \tag{32}$$

де W_0 - сумарне число уявних витків.

Звідки $p=16$, а

$$-\sum_{i=1}^{\infty}A_i J_p(k_i r)=IW_0\begin{pmatrix}0{,}4J_{16}(0{,}45r)+1{,}06J_{16}(0{,}4r)+1{,}62J_{16}(0{,}355r)+\\+1{,}56J_{16}(0{,}32r)+3{,}64J_{16}(0{,}2708r)+2{,}92J_{16}(0{,}22r)\end{pmatrix}\,. \tag{33}$$

Із (26) з врахуванням (33), отримаємо вирази для розрахунку кутової компоненти H_φ в зоні повітряного проміжку для (30) та в зоні диску для (31). Для розрахунку осьової компоненти H_z вектора напруженості магнітного поля в зоні повітряного проміжку із (27) з врахуванням (33) для (30) та в зоні диску для (31).

По отриманих формулах проведено розрахунки компонент вектора напруженості магнітного поля для чотирьох значень магнітної проникності матеріалу диску $\frac{\mu}{\mu_0}$ = 1, 10, 20, 200.

На рис. 2*а* показано графіки залежності осьової компоненти напруженості магнітного поля H_z від z в повітряному проміжку і диску для вказаних значень магнітної проникності матеріалу диску (криві 1, 5; 2, 6; 3, 7; 4, 8, відповідно) та при двох значеннях радіусу *r*=55 *мм* і *r*=70 *мм*.

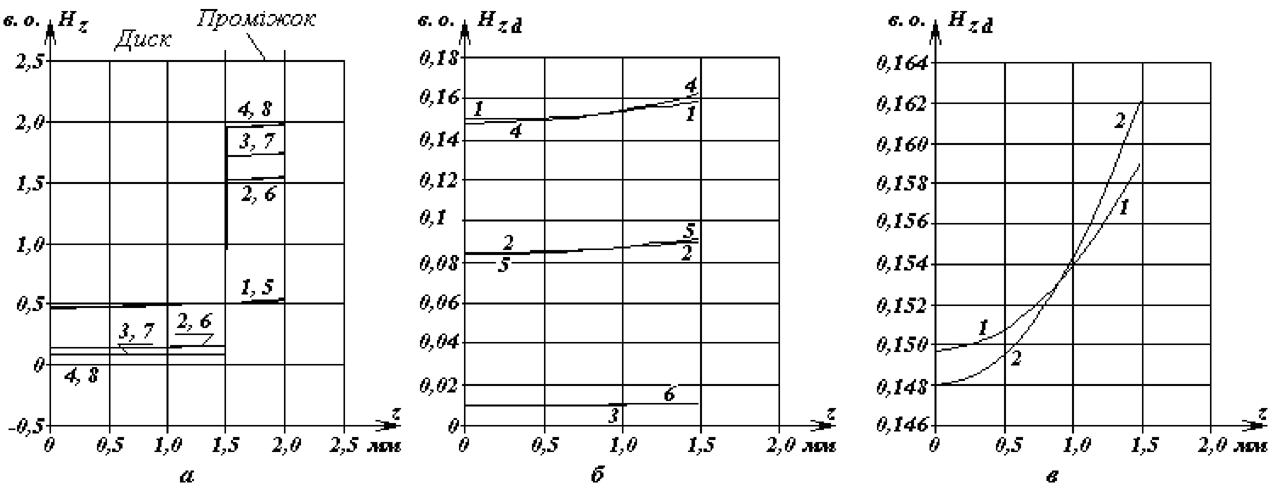

Рис. 2.

Розрахунок проведено для $\frac{d_з}{2} = 0{,}5$ *мм*, а $\frac{d_\partial}{2} = 1{,}5$ *мм*. З графіків видно, що осьова компонента напруженості магнітного поля практично не залежить від z як в зоні повітряного проміжку, так і в зоні диску. Більш детально характер зміни осьової компоненти напруженості магнітного поля в диску для трьох значень $\frac{\mu}{\mu_0}$ = 10, 20, 200 – показано на рис. 2*б* (криві 1, 4; 2, 5; 3, 6, відповідно). Криві 1, 2, 3 – стосуються радіусу 70 *мм*, а криві 4, 5, 6 – радіусу 55 *мм*. Чим більша магнітна проникність диску тим менша осьова компонента напруженості магнітного поля в диску і її залежність від z та більша різниця між напруженістю в повітряному проміжку і диску.

Залежність кутової компоненти вектора напруженості магнітного поля H_φ від осьової координати показана на рис. 3*а,б*. Криві 1, 5 розраховані для $\frac{\mu}{\mu_0}$=1 при *r*=55 *мм* і *r*=70 *мм*, відповідно, криві 2, 6 – для $\frac{\mu}{\mu_0}$=10, криві 3, 7 – для $\frac{\mu}{\mu_0}$ =20, криві 4, 8 – для $\frac{\mu}{\mu_0}$=200. Збільшення магнітної проникності диску приводить до зменшення кутової компоненти вектора напруженості магнітного поля на поверхні диску при незмінному її значенні біля поверхні індуктора (рис. 3*а*).

На рис. 3*б* показано характер залежності кутової компоненти напруженості магнітного поля в диску від координати z для вказаних вище значень $\frac{\mu}{\mu_0}$ в збільшеному масштабі. Вона має практично лінійний характер (рис. 3*б*). При більшому радіусі кутова компонента напруженості менша. Порівняно з осьовою компонентою напруженості магнітного поля кутова компонента суттєво менша. Вже при $\frac{\mu}{\mu_0}$=10 кутова компонента напруженості магнітного поля в повітряному проміжку біля поверхні диску становить менше 5% осьової компоненти при *r*=55 *мм* і менше 4% при *r*=70 *мм*.

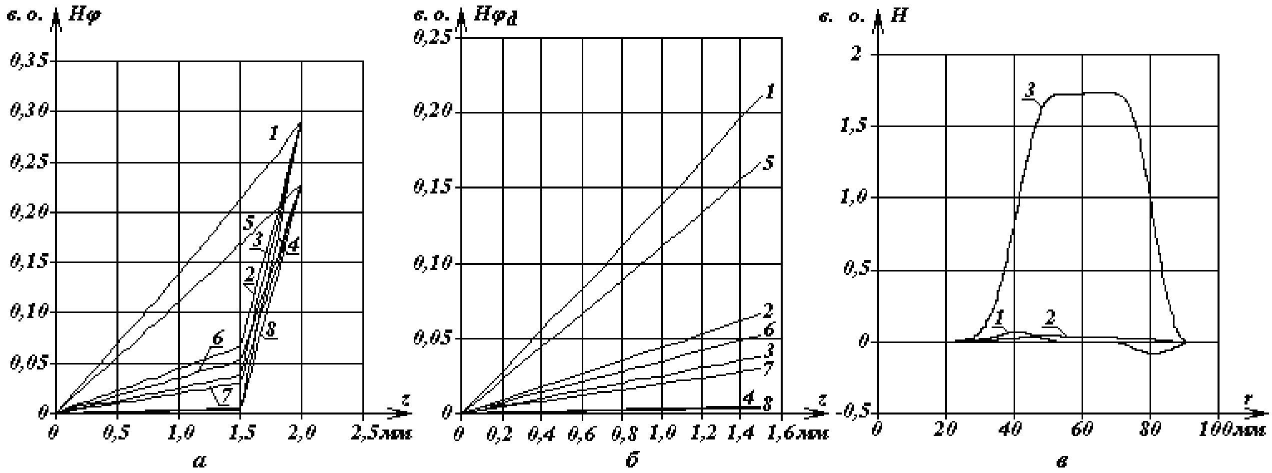

Рис. 3.

На рис. 3*в* показана залежність компонент вектора напруженості магнітного поля *H* в повітряному проміжку на поверхні диску від радіусу при $\frac{\mu}{\mu_0}$=20.

В робочій зоні при $55 < r < 70$ радіальна компонента (крива *1*) напруженості магнітного поля відсутня, а кутова (крива *2*) суттєво менша від осьової (крива *3*). В цьому діапазоні осьова компонента не залежить від радіусу.

Висновки

Для розрахунку струмів і зусиль в диску при його обертанні можна припустити, що диск обертається в магнітному полі лише з однією осьовою компонентою вектора магнітної індукції, нехтуючи радіальною та кутовою компонентою через їх відносну малість, тим більше, що кутова компонента в цьому випадку не впливає на виникнення струмів в диску.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев – М.: «Лань», 2010. – 608 с. с илл.

2. *Каплянский А.Е.* Теоретические основы электротехники. / А.Е. Каплянский, А.П. Лысенко, Л.С. Полотовский – М.: "Высшая школа", 1972. – 448 с. с илл.

3. *Потапов Л.А.* Измерение вращающих моментов и скоростей вращения микроэлектродвигателей. / Л. А. Потапов, Ф. М. Юферов – М. : Энергия, 1974. – 128 с. : ил.

4. *Циганкова Г.А.* Електромагнітна модель електродинамічного гальма із зубцево-пазовою конфігурацією зазору індуктора / Г.А. Циганкова // Праці Інституту електродинаміки НАН України, 2013. – В.34. – С.41-45.