Точні розв’язки нелінійного хвильового рівняння

А. Ф. Баранник,
Інститут математики Поморської академії, Слупськ, Польща
Т. А. Баранник,
Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г. Короленка
І.І. Юрик
Національний університет харчових технологій, Київ

Розглядається нелінійне рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\, F'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \quad (1)$$

Рівняння такого типу зустрічається в задачах хвильової і газової динаміки. Групові властивості рівняння (1) для *a=1* детальні дослідженні в [1], а умовна симетрія вивчалася в [2]. В загальному випадку рівняння (1) має точні розв'язки виду $u = \omega(z), \quad z = kx + \lambda t;$ $\quad u = \omega(\xi), \quad \xi = \frac{x+b}{t+c},$

де k, λ, b, c- довільні сталі.

Ми конструюємо розв’язки виду

$$t = \omega_1(x)\, d(u) + \omega_2(x) \quad (2)$$

Підстановка містить (2) три невідомі функції $\omega_1(x),\ \omega_2(x)$ та $d(u)$, які знаходяться з умови, що дана підстановка редагує рівняння (1) до системи звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $w_1(x)$ і $w_2(x)$.

Теорема. Якщо рівняння (1) допускає підстановку (2), то функція $F(u)$ визначається за формулою

$$F = \lambda (d')^2, \quad \lambda - \text{стала} \neq 0,$$

Де d(….) є довільним розв’язком рівняння

$$d'' = \lambda(\beta d + \gamma)(d')^{(1+2a)/a}, \quad \beta\gamma \in R, \quad \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$$

З теореми випливає зокрема, що побудова розв’язків виду (2) рівняння (1) у випадку $\beta \neq 0$, $a \neq \frac{1}{2}$ зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi_1' = \frac{2a}{\lambda}\varphi_1^3, \quad \varphi_2' = \frac{2a}{\lambda}\varphi_1^2\varphi_2 \quad (3)$$

Де $\varphi_1(x) = \frac{1}{1+2a}\omega_1^{-1}$, $\varphi_1(x) = -\frac{1}{1+2a}\omega_1^{-1}\omega_2$.

Система (3) має нескінченні серії точних розв’язків, які виражаються через еліптичні функції Якобі [*b*].

У випадку β=0, $a \neq$-1 рівняння (1) має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \lambda U^{-1(1+a)}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda a}{1+a} U^{-(2+a)(1+a)}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2, \quad (4)$$

Де $U = -\varepsilon U + b;\ \varepsilon = \pm 1, b \in R,$ яке локальним перетворенням

$U = V^{1+a}, x = \tau, t = \xi$ (5)

зводиться до нелінійного рівняння з квадратичною нелінійністю

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{a}{\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2, \quad (6)$$

Рівняння (6) вивчалося в [3-5]. На підставі розв’язків рівняння (6), з використанням (5), отримані розв’язки рівняння (4). Якщо, наприклад, $\sigma^2 = 3\alpha^2 - 9\alpha - \frac{1}{4} > 0$, де $\alpha = \frac{1}{1+a}$, $a \neq -1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$, то розв’язком рівняння (4) є функція

$$U^{1/(1+a)} = \frac{3\lambda}{1+2a} x^{-2} t^2 + x^{1/2} t^d \, [C_1 \cos(\sigma \ln t) + C_2 \sin(\sigma \ln t)],$$

Де C_1, C_2 – довільні сталі.

Література

1. W. F. Ames, R. J. Johner and E. Adans: Graph properties of $U_{tt} = [f(u) u_x]_x$ Inf. J. Nonlinear Mech. 16, 5-6 (1981), 439.
2. Ф. І. Фущич, М. І. Сєров, В. К. Ренета: Умовна симетрія, редукція і точні розв’язки нелінійного хвильового рівняння, Доповіді АН України (1991), №5, 23-34.
3. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev: Hardbook of nonlinear partial differential equations. Boce Raton, London: Chapman & Hall/CRC, 2004.
4. V. A. Golartionov, S. R. Svirchevskii: Exact solutions and invariant subspases of nonlinear differential equations in mechanics and physics. Boce Raton, London: Chapman & Hall/ CRC, 2007.
5. A. F. Baranchyk, T.A. Baranchyk and I. I. Yuryk: Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg de Vries type, Rep Math. Phys. 68(2011), no 1, 97-105.
6. A. F. Baranchyk, T.A. Baranchyk and I. I. Yuryk: Generalized separation of variables for nonlinear equations $U_{tt} = F(u) u_{xx} + aF^{`}(u) u_x^2$ Rep. Math. Phys. 71 (2013), no 1 1-13.