

В И Щ А О С В І Т А

***В. П. Дубовик, І. І. Юрик***

# **ВИЩА МАТЕМАТИКА**

***НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК***

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих  
навчальних закладів*

6-те видання  
перероблене та доповнене

Ігнатекс-Україна

Київ

2018

ББК 22.1я73

Д79

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів*

Рецензенти: Л. Баранник, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.О. Марченко, канд. фіз.-мат. наук (Полтавський пед. ін-т); В.Б. Рудницький, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Хмельницький технолог. ін-т).

**Дубовик В.П.**

Д79 Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик, П. Юрик. - К.: Ігнатекс-Україна, 2018 - 648 с.: іл. - (Вища школа). -  
Бібліогр.: с. 632-633.  
ISBN 978-966-97049-3-1

У посібнику розглянуто питання з таких розділів вищої математики, як векторна алгебра та аналітична геометрія; диференціальне й інтегральне числення; функції багатьох змінних; диференціальні рівняння; ряди, кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли.

Теоретичний матеріал відповідає навчальній програмі з курсу вищої математики і супроводжується достатньою кількістю прикладів і задач. Особливу увагу приділено прикладній і практичній спрямованості курсу.

Для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**ББК 22.1я73**

Дане видання захищене голографією. Без наявності голограми з логотипом «А.С.К.» видання є незаконним і контрафактною продукцією.  
Якщо Ви придбали цю книгу без голограми (підроблену продукцію), то зателефонувавши за номером 067-441-83-75 та відправивши її на нашу адресу: 03127 м. Київ, пр-т 40-річчя Жовтня, 120 корпус 1, разом з чеком і вказавши адресу придбання, Ви зможете отримати оригінальну книгу та 100 грн. винагороди.

*«А.С.К.» - є зареєстрованою торговою маркою. Свідчення на знак для товарів і послуг №-141175 від 11.07.2011р.*

*Охороняється Законом України про авторське право. Передрук даного посібника або будь-якої його частини забороняється без письмового дозволу видавництва. Будь-які спроби порушення закону переслідуватимуться у судовому порядку.*

**Гуртовий продаж за цінами видавництва:**

(044)-468-52-49

(095)-829-73-84

(097)-614-48-75

**e-mail:**

ignatex@ukr.net

**ISBN 978-966-97049-3-1**

© В.П. Дубовик, П.Юрик, 2001

© «Ігнатекс-Україна», 2009-2018

## Глава 1

### ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Термін «алгебра» походить від назви твору «Альджебр аль-мукабала» узбецького математика Мухаммеда аль-Хорезмі. Цей твір містить методи розв'язування задач, що зводяться до рівнянь першого і другого степенів.

Алгебраїчна символіка була створена в основному в 16—17 ст. Першим застосував буквенні позначення як для невідомих, так і для заданих в задачі величин, французький математик Ф. Віет.

До середини 18 ст. алгебра склалася приблизно в тому об'ємі, який нині називають елементарною алгеброю.

Однією з основних задач лінійної алгебри є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У зв'язку з вивченням цих систем виникли поняття визначника та матриці. Побудову загальної теорії систем лінійних рівнянь було завершено в 19 ст.

#### § 1. ВИЗНАЧНИКИ

##### 1.1. Визначники другого і третього порядків та їхні властивості

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Поняття «визначник» (від латинського *determino* — визначаю) ввів В. Лейбніц.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (2)$$

називається *визначником (детермінантом) третього порядку*.

Символи  $a_{ij}$  називаються елементами визначника, причому перший індекс  $i$  показує номер рядка, а другий індекс  $j$  — номер стовпця, на

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Рис. 1.1

перетині яких стоїть даний елемент. Так, елемент  $a_{23}$  стоїть у другому рядку і третьому стовпці.

Елементи  $a_{11}, a_{22}$  у визначнику (1) і  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  у визначнику (2) складають головну діагональ визначника, а елементи  $a_{12}, a_{21}$  і  $a_{13}, a_{23}, a_{31}$  в тих самих визначниках — побічну діагональ.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутників (рис. 1.1): перші три доданки в правій частині формули (2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

Зауважимо, що елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й алгебраїчні чи тригонометричні вирази, функції тощо.

#### Приклад

Обчислити визначники:

$$а) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad в) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

○ За формулами (1) і (2) маємо:

$$а) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-4) \cdot 3 = 22; \quad б) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \quad в) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 - 3 = -10. \bullet$$

Розглянемо (на прикладі визначників третього порядку) *основні властивості визначників*.

1°. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

За формулою (4) вирази, що стоять у дужках, відповідно дорівнюють алгебраїчним доповненням  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ , тому

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогічно доводяться й інші рівності. ●

Запис визначника за будь-якою з формул (5) називають *розкладом визначника* за елементами відповідного рядка чи стовпця.

**Приклад**

Обчислити визначник  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ , розкладаючи його за елементами тре-

тього рядка.

○ За третьою з формул (5) маємо

$$\Delta = 3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

Такий самий результат дає формула (2). ●

**Теорема 2.** Сума добутоків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

○ Розглянемо, наприклад, суму добутоків елементів першого рядка визначника (3) на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} &= -a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \\ &- a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - \\ &- a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = 0. \quad \bullet \end{aligned}$$

### 1.3. Поняття про визначники вищих порядків

Теорема 1 дає змогу ввести означення визначника довільного порядку. За означенням визначник  $n$ -го порядку дорівнює сумі добутоків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. Можна довести, що всі розглянуті вище властивості визначників третього порядку справджуються для визначників будь-якого порядку.

Розглянемо, наприклад, визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна розкласти за елементами будь-якого рядка, наприклад першого:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (6)$$

Оскільки всі алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$  у формулі (6) є визначники третього порядку, то цією формулою можна користуватись для обчислення визначника четвертого порядку. Але такий спосіб обчислення громіздкий: якщо для знаходження визначника четвертого порядку треба обчислювати чотири визначники третього порядку, то для знаходження визначника п'ятого порядку вже прийдеться обчислювати двадцять визначників третього порядку! Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 8<sup>о</sup> перетворюють визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою за елементами цього рядка, дістанемо тільки один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

### Приклади

Обчислити визначники:

$$1) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2) \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}.$$

○ 1) У першому рядку перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший і другий стовпці без змін, до третього додамо перший, а до четвертого — перший, помножений на  $(-2)$ . Тоді

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

2) У першому стовпці перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього, залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додамо другий, помножений на  $(-2)$ , до третього — перший, до четвертого — перший, помножений на  $(-2)$ , а до п'ятого — четвертий, помножений на  $(-2)$ . Матимемо

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 20 & -2 & -6 \\ 0 & -12 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого стовпця і винесемо за знак визначника спільний множник 2 з третього рядка і  $(-1)$  з четвертого:

$$\Delta_2 = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 & -3 \\ 12 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -1 & -3 \\ 11 & 10 & 1 & 1 \\ 6 & -31 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 11 & 10 & 1 \\ 6 & -31 & -6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \\ -18 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 150. \bullet$$

### Завдання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Сформулювати основні властивості визначників.
4. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням?
5. Сформулювати і довести теорему про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Чому дорівнює сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця)?
6. Як обчислюються визначники вищих (четвертого, п'ятого і т. д.) порядків?
7. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{є) } \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

8. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Розв'язати нерівності:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 1 \end{vmatrix} \leq 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} < 1.$$

Відповіді. 7. а) 11; б)  $-1$ ; в)  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$ ; г) 3; д)  $-10$ ; е)  $-216$   
 є)  $-303$ . 8. а) 2; 3; б) 0; 2. 9. а)  $[0; 1]$ ; б)  $(0; \sqrt[3]{2})$ .

## § 2. МАТРИЦІ

### 2.1. Основні означення

Прямокутна таблиця чисел  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , складена з  $m$  рядків та  $n$  стовпців і записана у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|,$$

називається *матрицею*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так:

$$A = (a_{ij}) \text{ або } A = \|a_{ij}\|,$$

де  $a_{ij}$  — елементи матриці, причому індекс  $i$  в елементі  $a_{ij}$  означає номер рядка, а  $j$  — номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Добуток числа рядків  $m$  на число стовпців  $n$  називають розміром матриці і позначають  $m \times n$ . Якщо хочуть вказати розмір  $m \times n$  матриці  $A$ , то пишуть  $A_{m \times n}$ .

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною*. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*. Матриця, у якій всього один рядок, називається матрицею-рядком, а матриця, у якій всього один стовпець, — матрицею-стовпцем. Дві матриці  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  та  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  називаються рівними, якщо вони однакового розмірів і мають рівні відповідні елементи:  $a_{ij} = b_{ij}$ . *Нульовою* називається матриця, у якій всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою  $O$ . Як і в визначниках (п. 1.1), в квадратних матрицях виділяють головну і побічну діагональ.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця, у якій кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається *одиничною* і позначається буквою  $E$ . Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будь-якій квадратній матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для дій  $1^0-4^0$  над матрицями виконуються такі властивості (за умови, що вказані операції мають зміст):

- а)  $(AB)C = A(BC)$ ; б)  $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ ;  
 в)  $(A+B)C = AC + BC$ ; г)  $C(A+B) = CA + CB$ ;  
 д)  $A \cdot O = O \cdot A = O$ ; е)  $AE = EA = A$ ; е)  $\det(AB) = \det A \times \det B$ .

### 2.3. Обернена матриця

Нехай  $A$  — квадратна матриця. Матриця  $A^{-1}$  називається *оберненою* до матриці  $A$ , якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратна матриця  $A$  називається *виродженою*, якщо  $\det A = 0$ , і *невиродженою*, якщо  $\det A \neq 0$ .

**Теорема 3.** Для існування оберненої матриці  $A^{-1}$  необхідно і достатньо, щоб матриця  $A$  була неvirодженою.

○ **Необхідність.** Нехай обернена матриця  $A^{-1}$  існує, тоді  $AA^{-1} = E$ . Застосовуючи правило знаходження визначника добутку двох матриць, маємо  $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ , тому  $\det A \neq 0$ .

○ **Достатність.** Нехай  $\det A \neq 0$ , тоді матриця  $A$  має обернену матрицю  $A^{-1}$ , причому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

де  $A_{ij}$  — алгебраїчні доповнення елементів  $a_{ij}$  визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Дійсно, добутки  $AA^{-1}$  і  $A^{-1}A$  матриць (7) і (8) дорівнюють матриці, у якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці (за тео-

ремою 1), а всі недиагональні елементи — нулю (за теоремою 2). Отже,  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ .

Покажемо, що  $A^{-1}$  — єдина обернена матриця. Нехай  $A''$  — ще одна обернена матриця, тоді

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AA'') = (A^{-1}A)A'' = EA'' = A''. \bullet$$

### Приклад

Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Обчислимо визначник матриці  $A$ :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Матриця  $A$  не вироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (7). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Складаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконуємось, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet$$

## 2.4. Ранг матриці

Нехай задано матрицю  $A_{m \times n} = A$ . Виділимо в матриці  $A$  будь-які  $k$  рядків і стільки ж стовпців, де  $k$  — число, не більше чисел  $m$  і  $n$ , тобто  $k \leq \min(m, n)$ .

Визначник порядку  $k$ , складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається *мінором*  $k$ -го порядку матриці  $A$ .

*Рангом*  $r(A)$  матриці  $A$  називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) Ранг існує для будь-якої матриці  $A_{m \times n}$ , причому

$$0 \leq r(A) \leq \min(m, n);$$

2)  $r(A) = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $A = 0$ ;

3) для квадратної матриці  $n$ -го порядку ранг дорівнює  $n$  тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці) дорівнюють нулю, то  $r = 0$ . Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то  $r = 1$ . У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку  $k$  дорівнюють нулю, або мінорів порядку  $k$  не існує, тоді  $r = k - 1$ .

### Приклад

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

○ Серед мінорів першого порядку (тобто елементів матриці) є відмінні від нуля) тому  $r(A) \geq 1$ .

Оскільки один з мінорів другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то  $r(A) = 2$ . ●

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати так звані елементарні перетворення, а саме [1]:

- а) переставити місцями два рядки (стовпці);
- б) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;
- в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

### Приклад

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

○ Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r(A) = 3.$$

(Знак  $\sim$  між матрицями показує, що вони утворюються одна з другої елементарними перетвореннями і, отже, мають один і той самий ранг). ●

### Завдання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Як визначаються: сума двох матриць, добуток матриці на число, різниця та добуток двох матриць?
3. Що називається оберненою матрицею?
4. Сформулювати і довести теорему про існування оберненої матриці.
5. Що називається рангом матриці? Як знаходиться ранг?

- внутрішня 141
- диференційовна 202, 298
- Діріхле 137
- експоненціальна 172, 176
- елементарна 141
- зовнішня 141
- зростаюча (незростаюча) 143
- інтегровна 368, 386, 390, 557, 567, 596
- ірраціональна (раціональна) 142
- квадратична 141
- Лагранжа 328
- лінійна 141
- монотонна 143
- неінтегровна 386
- непарна (парна) 143
- неперервна
  - в точці 184, 185, 291, 292
  - на множині 292
- нескінченно велика 159
- нескінченно мала 162, 176, 290
- неспадна (спадна) 143
- неявна 145
- обернена 146
- обмежена 142

- однозначна 133
- однорідна  $n$ -го виміру 430
- параметрично задана 147
- періодична 144, 538
- підінтегральна 368
- розривна в точці 185
- складена 141
- трансцендентна 142
- ціла раціональна 141, 347

#### Центр кола 119

- мас двох точок 53
- околу 129
- симетрії еліпса 102

#### Циліндр 116

Ціла частина змінної 137

Частина комплексного числа дійсна (уявна) 342

Число комплексне 342, 343

— хвильове 552

Швидкість руху точки 192

— хімічної реакції 194

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Елементи лінійної алгебри</b>	<b>6</b>
§ 1. <b>Визначники</b>	6
1.1. <b>Визначники другого і третього порядків та їхні властивості</b>	6
1.2. <b>Розклад визначника за елементами рядка або стовпця</b>	9
1.3. <b>Поняття про визначники вищих порядків</b>	10
<i>Завдання для самоконтролю</i>	12
§ 2. <b>Матриці</b>	13
2.1. <b>Основні означення</b>	13
2.2. <b>Дії над матрицями</b>	14
2.3. <b>Обернена матриця</b>	16
2.4. <b>Ранг матриці</b>	18
<i>Завдання для самоконтролю</i>	19
§ 3. <b>Системи лінійних рівнянь</b>	20
3.1. <b>Основні означення</b>	20
3.2. <b>Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера</b>	21
3.3. <b>Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв'язування</b>	24
3.4. <b>Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса</b>	25
3.5. <b>Однорідна система лінійних рівнянь</b>	28
3.6. <b>Критерій сумісності системи лінійних рівнянь</b>	30
<i>Завдання для самоконтролю</i>	31
<b>Глава 2. Елементи векторної алгебри</b>	<b>32</b>
§ 1. <b>Вектори і лінійні дії з ними</b>	32
1.1. <b>Скалярні і векторні величини</b>	32
1.2. <b>Лінійні дії з векторами</b>	33
1.3. <b>Розклад вектора за базисом</b>	35
1.4. <b>Проекція вектора на вісь</b>	37
<i>Завдання для самоконтролю</i>	39
§ 2. <b>Системи координат</b>	40
2.1. <b>Декартова система координат</b>	40
2.2. <b>Прямокутна система координат</b>	41
2.3. <b>Полярна система координат</b>	43
2.4. <b>Перетворення прямокутних координат на площині</b>	44
2.5. <b>Циліндрична та сферична системи координат</b>	45
2.6. <b>Поняття про <math>n</math>-вимірний простір</b>	46
2.7. <b>Лінійна залежність векторів</b>	47
<i>Завдання для самоконтролю</i>	49
§ 3. <b>Вектори в системі координат</b>	50
3.1. <b>Координати, довжина і напрямні косинуси вектора</b>	50
3.2. <b>Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів</b>	51

3.3.	Поділ відрізка в даному відношенні. Координати центра мас	52
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	53
§ 4.	Скалярний добуток двох векторів	54
4.1.	Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку	54
4.2.	Властивості скалярного добутку	55
4.3.	Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами	56
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	58
§ 5.	Векторний добуток двох векторів	58
5.1.	Означення і властивості векторного добутку	58
5.2.	Векторний добуток двох векторів, заданих координатами	60
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	62
§ 6.	Мішаний добуток векторів	62
6.1.	Означення і обчислення мішаного добутку	62
6.2.	Властивості мішаного добутку	63
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	65
<b>Глава 3. Елементи аналітичної геометрії</b>		66
§ 1.	Лнії на площині та їхні рівняння	66
1.1.	Поняття про лінію та її рівняння	66
1.2.	Знаходження рівняння лінії за її геометричними властивостями	67
1.3.	Полярні рівняння лінії	68
1.4.	Параметричні рівняння лінії	68
1.5.	Векторне рівняння лінії	70
1.6.	Про залежність рівняння лінії від вибору системи координат	71
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	71
§ 2.	Поверхні і лінії в просторі. Їхні рівняння	73
2.1.	Поверхня та її рівняння	73
2.2.	Рівняння лінії в просторі	74
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	75
§ 3.	Пряма на площині	76
3.1.	Різні види рівнянь прямої на площині	76
3.2.	Загальне рівняння прямої та його дослідження	78
3.3.	Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих	80
3.4.	Відстань від точки до прямої	82
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	83
§ 4.	Площина в просторі	84
4.1.	Загальне рівняння площини та його дослідження.	84
4.2.	Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях	86
4.3.	Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин	87
4.4.	Відстань від точки до площини	88
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	88
§ 5.	Пряма лінія в просторі	89
5.1.	Різні види рівнянь прямої в просторі	89
5.2.	Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих	91
5.3.	Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини	92
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	96
§ 6.	Лнії другого порядку	97
6.1.	Поняття лінії другого порядку	97
6.2.	Коло	98
6.3.	Еліпс	100
6.4.	Гіпербола	104

6.5.	Парабола	108
6.6.	Полярні та параметричні рівняння кривих другого порядку	110
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	113
§ 7.	Поверхні другого порядку	114
7.1.	Поняття поверхні другого порядку	114
7.2.	Циліндричні поверхні	114
7.3.	Поверхні обертання	116
7.4.	Конічні поверхні	117
7.5.	Сфера	119
7.6.	Еліпсоїд	119
7.7.	Однопорожнинний гіперboloїд	121
7.8.	Двопорожнинний гіперboloїд	121
7.9.	Еліптичний параболоїд	123
7.10.	Гіперболічний параболоїд	123
7.11.	Лінійчаті поверхні	123
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	125
<b>Глава 4.</b>	<b>Вступ до математичного аналізу</b>	<b>126</b>
§ 1.	Дійсні числа	126
1.1.	Множини. Логічні символи	126
1.2.	Множина дійсних чисел	127
1.3.	Числові проміжки. Окіл точки	128
1.4.	Модуль (абсолютна величина) дійсного числа	129
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	130
§ 2.	Функції	131
2.1.	Сталі і змінні величини	131
2.2.	Поняття функції	132
2.3.	Способи задання функцій	133
2.4.	Класифікація елементарних функцій	138
2.5.	Обмежені функції	142
2.6.	Монотонні функції	143
2.7.	Парні і непарні функції	143
2.8.	Періодичні функції	144
2.9.	Неявно задані функції	145
2.10.	Обернені функції	145
2.11.	Параметрично задані функції	147
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	148
§ 3.	Границя функції	149
3.1.	Числова послідовність	149
3.2.	Границя числової послідовності. Границя змінної величини. Єдиність границі	150
3.3.	Нескінченно великі змінні величини	153
3.4.	Границя функції в точці	155
3.5.	Границя функції при $x \rightarrow \infty$ . Нескінченно велика функція	158
3.6.	Нескінченно малі величини. Їхні властивості	162
3.7.	Основні теореми про границі	164
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	168
§ 4.	Обчислення границь функцій	169
4.1.	Перша важлива границя	169
4.2.	Число $e$ . Натуральні логарифми	170
4.3.	Друга важлива границя	173
4.4.	Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції	175
4.5.	Розкриття деяких невизначеностей	179
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	183
5.	Неперервність функцій	183



5.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву	184
5.2. Дії над неперервними функціями. Неперервність елементарних функцій	188
5.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку	189
<i>Завдання для самоконтролю</i>	190
<b>Глава 5. Диференціальне числення функцій однієї змінної</b>	191
§ 1. Похідна	191
1.1. Задачі, які приводять до поняття похідної	191
1.2. Означення похідної. Механічний, фізичний та геометричний зміст похідної	196
1.3. Графічне диференціювання	200
1.4. Односторонні похідні. Неперервність і диференційовність	201
<i>Завдання для самоконтролю</i>	203
§ 2. Диференціювання функцій	204
2.1. Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки	204
2.2. Похідні сталої, добутку сталої на функцію, степеневі, тригонометричних, показникової і логарифмічної функцій	205
2.3. Похідна складеної функції	207
2.4. Гіперболічні функції та їхні похідні	209
2.5. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій	211
2.6. Похідна функції, заданої параметрично	214
2.7. Диференціювання неявно заданої функції	215
2.8. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневі функції	215
2.9. Таблиця похідних	216
<i>Завдання для самоконтролю</i>	217
§ 3. Диференціал	218
3.1. Означення, геометричний та механічний зміст диференціала	218
3.2. Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала	220
3.3. Застосування диференціала в наближених обчисленнях	221
<i>Завдання для самоконтролю</i>	222
§ 4. Похідні та диференціали вищих порядків	223
4.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції	223
4.2. Похідні вищих порядків неявно заданої функції	224
4.3. Похідні вищих порядків параметрично заданої функції	225
4.4. Диференціали вищих порядків	226
<i>Завдання для самоконтролю</i>	227
§ 5. Деякі теореми диференціального числення	228
5.1. Теореми Ферма і Ролля	228
5.2. Теореми Коші і Лангранжа	230
5.3. Правило Лопітала	233
5.4. Формула Тейлора	238
<i>Завдання для самоконтролю</i>	245
§ 6. Застосування диференціального числення для дослідження функцій	246
6.1. Монотонність функції	246
6.2. Локальний екстремум функції	248
6.3. Найбільше і найменше значення функції	253
6.4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину	260
6.5. Асимптоти кривої	263
6.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка	265
<i>Завдання для самоконтролю</i>	266
§ 7. Застосування диференціального числення до деяких задач алгебри, геометрії, теорії наближень	268
7.1. Наближене розв'язування рівнянь	268
7.2. Інтерполяція функцій. Чисельне диференціювання	271

7.3. Диференціал довжини дуги	273
7.4. Кривина плоскої лінії	274
7.5. Вектор-функція скалярного аргументу. Дотична пряма і нормальна площина до кривої в просторі. Застосування у механіці	278
<i>Завдання для самоконтролю</i>	283
<b>Глава 6. Диференціальне числення функцій багатьох змінних</b>	284
§ 1. Функція, її границя та неперервність	284
1.1. Функція багатьох змінних. Означення та символіка	284
1.2. Границя функції багатьох змінних	289
1.3. Неперервність функції багатьох змінних	291
<i>Завдання для самоконтролю</i>	293
§ 2. Похідні та диференціали функції багатьох змінних	294
2.1. Частинні похідні	294
2.2. Диференційовність функції	297
2.3. Повний диференціал функції та його застосування до обчислення функцій і похибок. Диференціали вищих порядків	300
2.4. Похідна складеної функції. Повна похідна. Інваріантність форми повного диференціала	304
2.5. Диференціювання неявної функції	307
<i>Завдання для самоконтролю</i>	309
§ 3. Деякі застосування частинних похідних	310
3.1. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних	310
3.2. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.	313
3.3. Формула Тейлора для функції двох змінних	318
3.4. Локальні екстремуми функції двох змінних	320
3.5. Найбільше та найменше значення функції	324
3.6. Умовний екстремум	327
<i>Завдання для самоконтролю</i>	329
<b>Глава 7. Інтегральне числення функцій однієї змінної</b>	330
§ 1. Невизначений інтеграл	321
1.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла	331
1.2. Таблиця основних інтегралів	334
1.3. Основні методи інтегрування	336
1.4. Поняття про комплексні числа	342
1.5. Деякі відомості про раціональні функції	347
1.6. Інтегрування раціональних функцій	352
1.7. Інтегрування деяких ірраціональних і трансцендентних функцій	355
1.8. Інтеграл, що «не беруться»	361
<i>Завдання для самоконтролю</i>	362
§ 2. Визначений інтеграл	365
2.1. Задачі, що приводять до визначеного інтеграла	365
2.2. Означення та умови існування визначеного інтеграла	367
2.3. Властивості визначеного інтеграла	370
2.4. Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона — Лейбніца	376
2.5. Методи обчислення визначених інтегралів	380
2.6. Невласні інтеграли	385
2.7. Наближене обчислення визначених інтегралів	394
<i>Завдання для самоконтролю</i>	400
§ 3. Деякі застосування визначеного інтеграла	401
3.1. Обчислення площ плоских фігур	401

3.2. Довжина дуги	405
3.3. Об'єм тіла	406
3.4. Площа поверхні обертання	408
3.5. Обчислення роботи	409
3.6. Обчислення тиску рідини на вертикальну пластину	411
<i>Завдання для самоконтролю</i>	411
§ 4. Інтегралі, залежні від параметрів. Гамма- і бета-функції	412
4.1. Інтегралі, залежні від параметрів	412
4.2. Гамма- і бета-функції	417
<i>Завдання для самоконтролю</i>	420
<b>Глава 8. Звичайні диференціальні рівняння</b>	421
§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку	421
1.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний зміст диференціального рівняння	421
1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	427
1.3. Однорідні диференціальні рівняння	430
1.4. Лінійні диференціальні рівняння	433
1.5. Рівняння, які зводяться до лінійних. Рівняння Бернуллі та Ріккати	435
1.6. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник	438
1.7. Диференціальні рівняння, нерозв'язувані відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро	441
1.8. Наближене розв'язування диференціальних рівнянь методом Ейлера	445
1.9. Деякі застосування диференціальних рівнянь першого порядку	446
<i>Завдання для самоконтролю</i>	450
§ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків	451
2.1. Основні поняття і означення. Задача Коші	451
2.2. Диференціальні рівняння $n$ -го порядку, які інтегруються в квадратурах	453
2.3. Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку	455
<i>Завдання для самоконтролю</i>	460
§ 3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків	460
3.1. Основні означення і поняття	460
3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку	461
3.3. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку	466
3.4. Метод варіації довільних сталих	467
<i>Завдання для самоконтролю</i>	469
§ 4. Лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами	470
4.1. Лінійні однорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами	470
4.2. Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Рівняння із спеціальною правою частиною	473
4.3. Лінійні диференціальні рівняння $n$ -го порядку	478
<i>Завдання для самоконтролю</i>	482
§ 5. Диференціальні рівняння коливань	483
5.1. Вільні гармонічні коливання	483
5.2. Вимушені коливання. Резонанс	485
<i>Завдання для самоконтролю</i>	486
§ 6. Системи диференціальних рівнянь	487
6.1. Нормальні системи рівнянь	488
6.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами	491
<i>Завдання для самоконтролю</i>	493
<b>Глава 9. Ряди</b>	493
§ 1. Числові ряди	494
1.1. Основні поняття та означення. Геометрична прогресія. Гармонічний ряд	494
1.2. Найпростіші властивості числових рядів	496

1.3.	Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності	498
1.4.	Ряди, в яких знаки членів строго чергуються. Ознака Лейбніца	505
1.5.	Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжності	507
1.6.	Поняття про числові ряди з комплексними членами	509
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	510
§ 2.	Степеневі ряди	512
2.1.	Функціональні ряди. Поняття рівномірної збіжності. Ознака Вейерштрасса	512
2.2.	Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду	516
2.3.	Властивості степеневих рядів	519
2.4.	Ряд Тейлора	521
2.5.	Розкладання елементарних функцій в ряд Маклорена	524
2.6.	Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів	527
2.7.	Рівняння і функції Бесселя	531
2.8.	Поняття про степеневі ряди в комплексній області. Формули Ейлера.	534
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	536
§ 3.	Ряди Фур'є	538
3.1.	Гармонічні коливання	538
3.2.	Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є	540
3.3.	Ряд Фур'є для парних і непарних функцій	545
3.4.	Ряд Фур'є для $2l$ -періодичної функції	547
3.5.	Ряди Фур'є для функцій, заданих на відрізку $[0; l]$ або на відрізку $[a; b]$	549
3.6.	Комплексна форма ряду Фур'є	551
3.7.	Ряд Фур'є за ортогональною системою функцій	553
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	556
§ 4.	Інтеграл та перетворення Фур'є	557
4.1.	Інтеграл Фур'є	557
4.2.	Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій	560
4.3.	Інтеграл Фур'є в комплексній формі. Перетворення Фур'є	562
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	564
<b>Глава 10.</b>	<b>Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли</b>	<b>564</b>
§ 1.	Подвійний інтеграл	564
1.1.	Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла	564
1.2.	Поняття подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості	566
1.3.	Обчислення подвійного інтеграла	569
1.4.	Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах	574
1.5.	Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії	577
1.6.	Застосування подвійного інтеграла до задач механіки	581
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	583
§ 2.	Потрійний інтеграл	585
2.1.	Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості	585
2.2.	Обчислення потрійного інтеграла	587
2.3.	Заміна змінної в потрійному інтегралі	589
2.4.	Деякі застосування потрійного інтеграла	592
	<i>Завдання для самоконтролю</i>	594
§ 3.	Криволінійні інтеграли	595
3.1.	Поняття криволінійного інтеграла першого роду (по довжині дуги)	595
3.2.	Обчислення криволінійних інтегралів першого роду	598
3.3.	Застосування криволінійного інтеграла першого роду	599
3.4.	Поняття криволінійного інтеграла другого роду (по координатах). Фізичний зміст	600
3.5.	Обчислення та застосування криволінійного інтеграла другого роду	603

3.6. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду ....	607
3.7. Формула Гріна .....	608
3.8. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування .....	610
3.9. Інтегрування повних диференціалів. Первісна функція .....	614
<i>Завдання для самоконтролю</i> .....	617
§ 4. Поверхневі інтеграли .....	618
4.1. Поверхневі інтеграли першого ряду .....	618
4.2. Поверхневі інтеграли другого ряду .....	621
4.3. Формула Остроградського – Гауса .....	626
4.4. Формула Стокса .....	628
<i>Завдання для самоконтролю</i> .....	631
<i>Список рекомендованої і використаної літератури</i> .....	632
<i>Іменний покажчик</i> .....	634
<i>Предметний покажчик</i> .....	636

*Навчальне видання*  
**ДУБОВИК Володимир Папасович**  
**ЮРИК Іван Іванович**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**  
**(українською мовою)**

**6-те видання**  
**перероблене та доповнене**

Підписано до друку 20.03.2018 Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.  
Друк офсетний. Гарнітура літературна. Умовн.-друк. арк. 37,66  
тираж 500  
«Ігнатієв-Україна», 03127, Київ, пр-т 40-річчя Жовтня, 120, корпус 1  
Свідцтво Держкомінформу України ДК № 3414 від 05. 03. 2009.

Відаруковано в Україні

Висновок державної санітарно-епідеміологічної експертизи  
№ 05.03.02-04/52772 від 31.05.2012р.