В И Щ А   О С В І Т А

В. П. Дубовик, І. І. Юрик

ВИЩА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих
навчальних закладів

6-те видання
перероблене та доповнене

Ігнатекс-Україна
Київ
2018

ББК 22.1я73

Д79

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Р е ц е н з е н т и : *Л. Баранник*, д-р фіз.-мат. наук, проф.; *В.О. Марченко*, канд. фіз.-мат. наук (Полтавський пед. ін-т); *В.Б.Рудницький*, д-р фіз.- мат. наук, проф. (Хмельницький технолог .ін-т).

Дубовик В.П

Д79 Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. - К. : Ігнатекс-Україна., 2018 - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.

ISBN 978- 966-97049-3-1

У посібнику розглянуто питання з таких розділів вищої математики, як векторна алгебра та аналітична геометрія; диференціальне й інтегральне числення; функції багатьох змінних; диференціальні рівняння; ряди, кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли.

Теоретичний матеріал відповідає навчальній програмі з курсу вищої математики і супроводжується достатньою кількістю прикладів і задач. Особливу увагу приділено прикладній і практичній спрямованості курсу.

Для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК 22.1я73

Гуртовий продаж за цінами видавництва:

(044)- 468-52-49

(095)-829-73-84

(097)-614-48-75

e-mail:

ignatex@ukr.net

ISBN 978-966-97049-3-1

Глава 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Термін «алгебра» походить від назви твору «Альджебр аль-мукабала» узбецького математика Мухаммеда аль-Хорезмі. Цей твір містить методи розв'язування задач, що зводяться до рівняннь першого і другого степенів.

Алгебраїчна символіка була створена в основному в 16—17 ст. Першим застосував буквенні позначення як для невідомих, так і для заданих в задачі величин, французький математик Ф. Вієт.

До середини 18 ст. алгебра склалася приблизно в тому об'ємі, який нині називають елементарною алгеброю.

Однією з основних задач лінійної алгебри є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У зв'язку з вивченням цих систем виникли поняття визначника та матриці. Побудову загальної теорії систем лінійних рівнянь було завершено в 19 ст.

§ 1. ВИЗНАЧНИКИ

1.1. Визначники другого і третього порядків та їхні властивості

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку.*

Поняття «визначник» (від латинського determino — визначаю) ввів В. Лейбніц.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}x_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \tag{2}$$

називається *визначником (детермінантом) третього порядку.*

Символи a_{ij} називаються елементами визначника, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j — номер стовпця, на

Рис. 1.1

перетині яких стоїть даний елемент. Так, елемент a_{23} стоїть у другому рядку і третьому стовпці.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (2) складають головну діагональ визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках — побічну діагональ.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутників (рис. 1.1): перші три доданки в правій частині формули (2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

Зауважимо, що елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й алгебраїчні чи тригонометричні вирази, функції тощо.

Приклад

Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

○ За формулами (1) і (2) маємо:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-4)\cdot 3 = 22$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$

$= 1$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 1\cdot 2 \times$

$\times 2 - 3\cdot 5\cdot 3 = -10$. ●

Розглянемо (на прикладі визначників третього порядку) *основні властивості визначників.*

1°. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

За формулою (4) вирази, що стоять у дужках, відповідно дорівнюють алгебраїчним доповненням A_{11}, A_{12}, A_{13}, тому

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогічно доводяться й інші рівності. ●

Запис визначника за будь-якою з формул (5) називають *розкладом визначника* за елементами відповідного рядка чи стовпця.

Приклад

Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

○ За третьою з формул (5) маємо

$$\Delta = 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

Такий самий результат дає формула (2). ●

Теорема 2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

○ Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка визначника (3) на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) -$$

$$-a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = 0. \quad ●$$

1.3. Поняття про визначники вищих порядків

Теорема 1 дає змогу ввести означення визначника довільного порядку. За означенням визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. Можна довести, що всі розглянуті вище властивості визначників третього порядку справджуються для визначників будь-якого порядку.

Розглянемо, наприклад, визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна розкласти за елементами будь-якого рядка, наприклад першого:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \qquad (6)$$

Оскільки всі алгебраїчні доповнення A_{ij} у формулі (6) є визначники третього порядку, то цією формулою можна користуватись для обчислення визначника четвертого порядку. Але такий спосіб обчислення громіздкий: якщо для знаходження визначника четвертого порядку треба обчислювати чотири визначники третього порядку, то для знаходження визначника п'ятого порядку вже прийдеться обчислювати двадцять визначників третього порядку! Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 8^0 перетворюють визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою за елементами цього рядка, дістанемо тільки один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклади

Обчислити визначники:

$$1)\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}.$$

○ 1) У першому рядку перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший і другий стовпці без змін, до третього додамо перший, а до четвертого — перший, помножений на (—2). Тоді

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

2) У першому стовпці перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього, залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додамо другий, помножений на (—2), до третього — перший, до четвертого — перший, помножений на (—2), а до п'ятого — четвертий, помножений на (—2). Матимемо

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 20 & -2 & -6 \\ 0 & -12 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого стовпця і винесемо за знак визначника спільний множник 2 з третього рядка і (—1) з четвертого:

$$\Delta_2 = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 & -3 \\ 12 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -1 & -3 \\ 11 & 10 & 1 & 1 \\ 6 & -31 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 11 & 10 & 1 \\ 6 & -31 & -6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \\ -18 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 150. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Сформулювати основні властивості визначників.
4. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням?
5. Сформулювати і довести теорему про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Чому дорівнює сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця)?
6. Як обчислюються визначники вищих (четвертого, п'ятого і т. д.) порядків?
7. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

8. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

9. Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 1 \end{vmatrix} \leqslant 0$; б) $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} < 1$.

Відповіді. 7. а) 11; б) —1; в) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$; г) 3; д) —10; е) —216 є) —303. 8. а) 2; 3; б) 0; 2. 9. а) [0; 1]; б) $(0; \sqrt[3]{2})$.

§ 2. МАТРИЦІ

2.1. Основні означення

Прямокутна таблиця чисел a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, складена з m рядків та n стовпців і записана у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

називається *матрицею*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так:

$$A = (a_{ij}) \text{ або } A = \| a_{ij} \|,$$

де a_{ij} — елементи матриці, причому індекс i в елементі a_{ij} означає номер рядка, а j — номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Добуток числа рядків m на число стовпців n називають розміром матриці і позначають $m \times n$. Якщо хочуть вказати розмір $m \times n$ матриці A, то пишуть $A_{m \times n}$.

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною*. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*. Матриця, у якої всього один рядок, називається матрицею-рядком, а матриця, у якої всього один стовпець,— матрицею-стовпцем. Дві матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$. *Нульовою* називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою O. Як і в визначниках (п. 1.1), в квадратних матрицях виділяють головну і побічну діагональ.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається *одиничною* і позначається буквою E. Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будь-якій квадратній матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -5 & 17\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & -9 & 35\\ 15 & -10 & 20\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Для дій 1^0—4^0 над матрицями виконуються такі властивості (за умови, що вказані операції мають зміст):

а) $(AB)\,C = A\,(BC)$; б) $(\alpha A)\,B = A\,(\alpha B) = \alpha\,(AB)$;

в) $(A + B)\,C = AC + BC$; г) $C\,(A + B) = CA + CB$;

д) $A \cdot O = O \cdot A = O$; е) $AE = EA = A$; є) $\det (AB) = \det A \times \det B$.

2.3. Обернена матриця

Нехай A — квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$, і *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема 3. *Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.*

○ Необхідність. Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $AA^{-1} = E$. Застосовуючи правило знаходження визначника добутку двох матриць, маємо $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, тому $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай $\det A \neq 0$, тоді матриця A має обернену матрицю A^{-1}, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (7)$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Дійсно, добутки AA^{-1} і $A^{-1}A$ матриць (7) і (8) дорівнюють матриці, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці (за теоремою 1), а всі недіагональні елементи — нулю (за теоремою 2). Отже, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Покажемо, що A^{-1} — єдина обернена матриця. Нехай A'' — ще одна обернена матриця, тоді

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AA'') = (A^{-1}A)A'' = EA'' = A''. \quad \bullet$$

Приклад

Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (7). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Складаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконуємось, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

2.4. Ранг матриці

Нехай задано матрицю $A_{m\times n} = A$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k — число, не більше чисел m і n, тобто $k \leqslant \min(m, n)$.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається *мінором* k-го порядку матриці A.

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) Ранг існує для будь-якої матриці $A_{m\times n}$, причому

$$0 \leqslant r(A) \leqslant \min(m, n);$$

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = 0$;

3) для квадратної матриці n-го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці) дорівнюють нулю, то $r = 0$. Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю, або мінорів порядку k не існує, тоді $r = k - 1$.

Приклад

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

○ Серед мінорів першого порядку (тобто елементів матриці) є відмінні від нуля) тому $r(A) \geqslant 1$.

Оскільки один з мінорів другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 2$. ●

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод грунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати так звані елементарні перетворення, а саме [1]:

а) переставити місцями два рядки (стовпці);

б) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Приклад

Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

○ Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r(A) = 3.$$

(Знак $\sim$ між матрицями показує, що вони утворюються одна з другої елементарними перетвореннями і, отже, мають один і той самий ранг). ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Як визначаються: сума двох матриць, добуток матриці на число, різниця та добуток двох матриць?
3. Що називається оберненою матрицею?
4. Сформулювати і довести теорему про існування оберненої матриці.
5. Що називається рангом матриці? Як знаходиться ранг?

ЗМІСТ

Навчальне видання
ДУБОВИК Володимир Панасович
ЮРИК Іван Іванович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(українською мовою)

6-те видання
перероблене та доповнене

Підписано до друку 20.03.2018 Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура літературна. Умовн.-друк. арк. 37,66
тираж 500
«Ігнатекс-Україна », 03127, Київ, пр-т 40-річчя Жовтня, 120, корпус 1
Свідоцтво Держкомінформу України ДК № 3414 від 05. 03. 2009.

Віддруковано в Україні

Висновок державної санітарно-епідеміологічної експертизи
№ 05.03.02-04/52772 від 31.05.2012р.